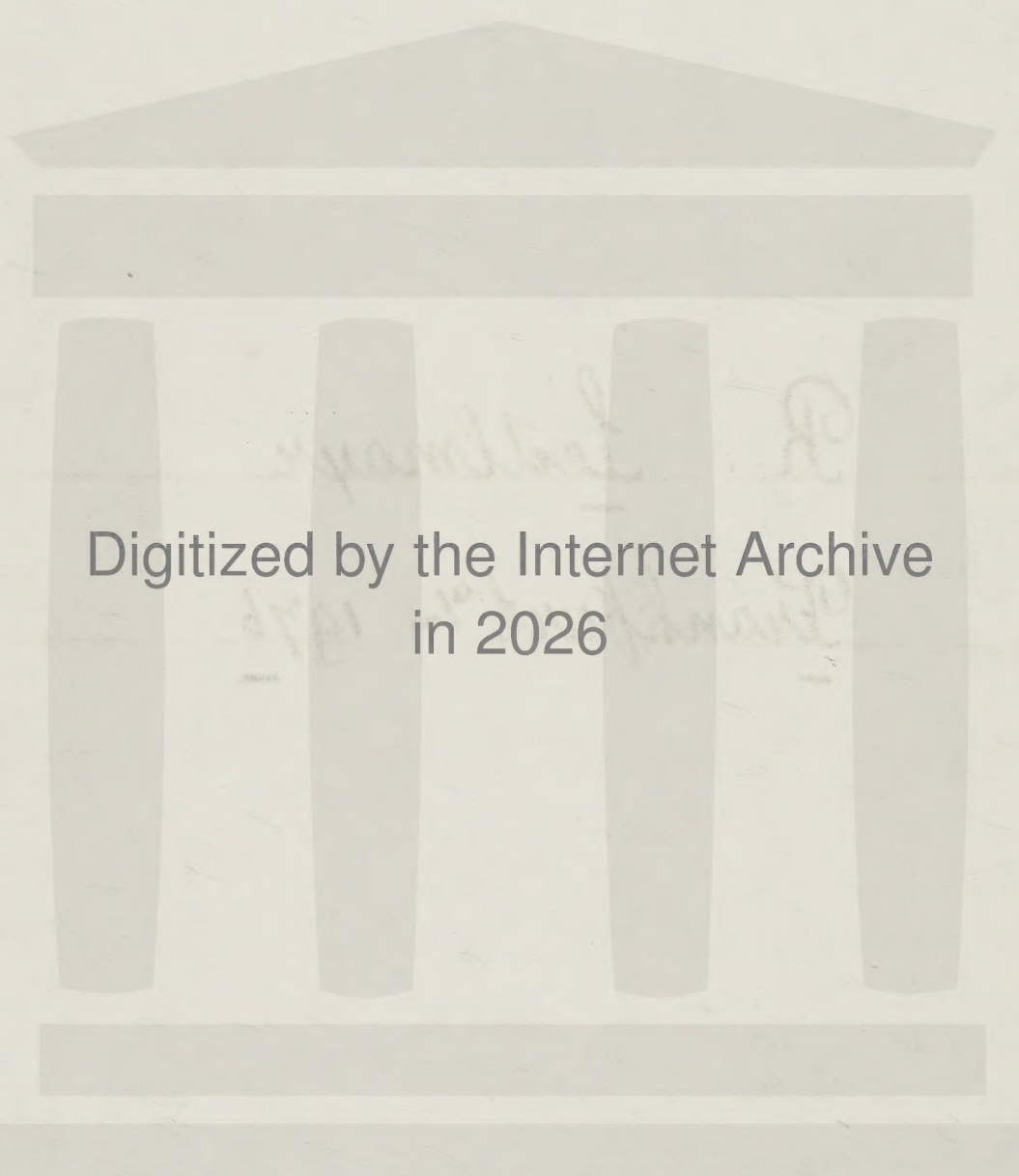


R. Ledlma^yr

Frankfurt ^{am} 1976



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41550826_0033

Dekan:

Prof. Dr. E. Schopper

Erster Gutachter:

Prof. Dr. W. Greiner

Zweiter Gutachter:

Prof. Dr. R. Dreizler

Tag der mündlichen Prüfung:

07. Dez. 1976

DIE
QUADRUPOLRIESENRESONANZEN
IM
DYNAMISCHEN KOLLEKTIVMODELL

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaften
vorgelegt beim Fachbereich Physik
der
Johann Wolfgang Goethe Universität
zu Frankfurt am Main

von
Rolf Sedlmayr
aus
Frankfurt am Main

Frankfurt am Main
1976



Inhaltsverzeichnis

	Seite
Abstract	
Einleitung	1
1. <u>Beschreibung des Modells</u>	3
1.1 Kogrediente und kontragrediente Tensoren	3
1.2 Umkopplungstheorie für Tensorprodukte	4
1.3 Definition der irreduziblen Oberflächen-Multipol-Tensoren	8
1.4 Der Hamiltonoperator für Oberflächen-Quadrupol-Oszillationen	9
1.5 Das hydrodynamische Modell	11
1.5.1 Der Oberflächen-Normalen-Vektor	14
1.5.2 Volumenkonstanz und Schwerpunktserhaltung	16
1.5.3 Lösung der Wellengleichung	18
1.6 Die Energien der Riesenresonanzen	20
1.7 Der Hamiltonoperator für Dipol- und Quadrupol-Volumenschwingungen	21
1.8 Die Wechselwirkungsoperatoren H_D und H_Q	22
1.9 Die Quantisierung der Hamiltonoperatoren	24
1.10 Die Basishamiltonoperatoren	26
1.11 Die Kopplungskonstanten von H_D , H_Q und ihre Renormierung	27
2. <u>Multipoloperatoren</u>	38
2.1 Allgemeine Darstellung	38
2.2 Die Renormierung der Konstanten	41
2.3 Dipol- und Quadrupoloperator	44
3. <u>Summenregel für Dipol und Quadrupol</u>	46
3.1 Die Dipolsummenregel	46
3.2 Die Quadrupolsummenregel	47

4.	<u>Theorie der photonuklearen Streuung und Absorption</u>	49
4.1	Der allgemeine Formalismus	49
4.2	Die Übergangswahrscheinlichkeit	51
4.3	Die Streuamplitude für Dipol- und Quadrupolstreuung	52
4.4	Der Absorptionsquerschnitt	56
4.5	Der Streuquerschnitt	57
5.	<u>Ergebnisse</u>	59
5.1	Konvergenz und Genauigkeit	59
5.2	Schematische Studien	69
5.3	Übergang vom anharmonischen Vibrator zum symmetrischen Rotator am Beispiel der Nd- und der Sm-Isotope	88
5.3.1	Die Nd-Isotopenreihe	88
5.3.2	Die Sm-Isotopenreihe	105
5.4	Übergang vom anharmonischen Vibrator zum asymmetrischen Kreisel am Beispiel der Ru-Isotope	121
5.5	Weitere Beispiele und Vergleich mit dem Experiment	135
5.5.1	Die Os-Isotope	135
5.5.2	Die Gd-Isotopenreihe	149
5.5.3	Die Te-Isotope	157
5.6	Zusammenfassung	168
6.	<u>Anhang</u>	170
6.1	Mathematische Formeln	170
6.2	Berechnung der Matrixelemente	172
6.3	Tabellen der Koeffizienten der Hamilton- operatoren	182
	Verzeichnis der Figuren	190

Abstract

In this work, the Dynamic Collective Model is extended into the region immediately above the giant dipole resonances, that means into a energy region between 20 and 28 MeV.

The total Hamiltonian is constructed and the dynamical problem is solved by diagonalizing the Hamiltonian in the basis of a 5-dimensional harmonic oscillator.

Einleitung

Das dynamische Verhalten von Viel-Nukleonen-Systemen wird mit Hilfe von kollektiven Freiheitsgraden beschrieben. Typische Vertreter solcher kollektiven Bewegungen sind Kernrotationen, Oberflächenvibrationen und Riesenresonanzoszillationen.

Während Bewegungen im niederenergetischen Bereich einige MeV nicht übersteigen, sind die Riesenresonanzoszillationen Anregungszustände des Kerns im Kontinuum. Die Dipolriesenresonanzen liegen im Energiebereich von 12-22 MeV, die Anregungsenergie der Quadrupolriesenresonanzen liegt zwischen 20 und 28 MeV, ein Gebiet also, das sich unmittelbar an die Dipolriesenresonanzen anschließt.

In dieser Arbeit wird die Theorie der Photonenanregung im Rahmen des dynamischen Kollektivmodells¹ auf den Energiebereich von 20 bis 28 MeV erweitert.

Die Grundlage ist das hydrodynamische Modell von Steinwedel und Jensen², in dem die Anregung der Protonen- und Neutronenflüssigkeit durch den Quadrupolterm in der Multipolentwicklung der einfallenden elektromagnetischen Welle betrachtet wird. Für Kerne mit Spin 0^+ im Grundzustand kommen auf Grund der Erhaltung von Parität und Drehimpuls für Quadrupolabsorption nur 2^+ -Niveaus als Endzustände in Frage.

Die Quadrupolriesenresonanzen werden durch kollektive Bewegungen der Protonen und Neutronen in gewisse Normalrichtungen erklärt. Da der Quadrupolterm den Drehimpuls $L=2$ hat, erwartet man bei asymmetrischen Kerntypen fünf Schwingungsformen; bei sphärischen Kernen sind diese entartet.

Im ersten Teil der Arbeit wird der Hamiltonoperator für Quadrupoloberflächenschwingungen, für Dipol- und Quadrupolvolumenschwingungen und für die Wechselwirkungsoperatoren zwischen Volumen- und Oberflächenoszillationen in der allgemeinen Form aufgestellt.

Im zweiten Teil werden Dipol- und Quadrupoloperator hergeleitet; der dritte Teil der Arbeit befaßt sich mit den Summenregeln für Dipol- und Quadrupolresonanzen. Die Theorie der photonuklearen Streuung und Absorption wird im vierten Teil vorgestellt. Im fünften Teil werden die Ergebnisse diskutiert.

Die mathematischen Formeln und die Berechnung der verwendeten
Matrixelemente befinden sich im Anhang.

1. Die Beschreibung des Modells

In diesem Abschnitt wird das Kollektivmodell³ und das dynamische Kollektivmodell¹ behandelt. Nach einer allgemeinen Einführung über Tensoren und deren Kopplung wird der Hamiltonoperator für Oberflächenquadrupolschwingungen aufgestellt. Anschließend wird das hydrodynamische Modell von Steinwedel und Jensen² vorgestellt. In den letzten Paragraphen dieses Abschnittes werden die Hamiltonoperatoren für Dipol- und Quadrupolvolumenschwingungen, die Wechselwirkungsoperatoren zwischen Volumen- und Oberflächenschwingungen und der Basishamiltonoperator aufgestellt; die Berechnung der Kopplungskonstanten und ihre Renormierung erfolgt im vorletzten Paragraphen.

1.1. Kogrediente und kontragrediente Tensoren

k Größen bilden einen Tensor bezüglich einer Gruppe G linearer Transformationen des n -dimensionalen Raumes, wenn sie sich wie eine Basis eines k -dimensionalen Darstellungsraumes von G transformieren. Tensoren heißen reduzibel oder irreduzibel bezüglich G , je nachdem, ob der entsprechende Darstellungsraum reduzibel bzw. irreduzibel ist¹.

Alle in dieser Arbeit vorkommenden Variablen und die ihnen zugeordneten Operatoren sind tensorielle Größen. Wir unterscheiden zwischen kogredienten irreduziblen Tensoren $\pi^{[L]} \equiv \{T_{L\mu}\}$ und dazu kontragredienten $\tilde{\pi}^{[L]} \equiv \{\tilde{T}_{L\mu}\}$ (hinsichtlich $SO(3)$). Eine solche Unterscheidung ist notwendig, da Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für Teilchen mit definiertem Spin stets zueinander kontragredient sein müssen. Die Definition von $\tilde{\pi}^{[L]}$ bezüglich $\pi^{[L]}$ geschieht durch die Vorschrift:

$$\sum_{\mu} \tilde{T}_{L\mu} T_{L\mu} = \text{skalare Kontraktion} \quad (1)$$

Die entsprechenden Produkte der kogredienten und kontragredienten Tensoren lauten:

$$\begin{aligned} & [\pi^{[L_1]} \times \pi^{[L_2]}]^{[J]} = \\ & = \sum_{\mu_1 \mu_2} \langle L_1 L_2 J | M | L_1 \mu_1 L_2 \mu_2 \rangle T_{L_1 \mu_1} T_{L_2 \mu_2} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
 [\Pi^{[\tilde{L}_1]} \times \Pi^{[\tilde{L}_2]}][\tilde{J}] &= \\
 &= \sum_{\mu_1 \mu_2} \langle L_1 \mu_1 L_2 \mu_2 | L_1 L_2 J M \rangle \cdot \tilde{T}_{L_1 \mu_1} \tilde{T}_{L_2 \mu_2}
 \end{aligned} \quad (3)$$

Die in den Definitionen (2) und (3) auftretenden Koeffizienten sind die Matrixelemente zueinander kogredienter Transformationen. In der reellen Darstellung sind sie gleich den Clebsch-Gordon-Koeffizienten ($L_1 L_2 J | \mu_1 \mu_2 M$).

Zwei Produktdarstellungen irreduzibler Tensoren sind zueinander kontragredient:

$$\begin{aligned}
 &[\mathcal{U}^{[\tilde{L}_1]} \Pi^{[\tilde{L}_1]} \times \Pi^{[L_2]}][J] \\
 \text{und} &[\Pi^{[\tilde{L}_1]} \times \mathcal{U}^{[L_2]} \Pi^{[L_2]}][\tilde{J}]
 \end{aligned} \quad (4)$$

wobei $\mathcal{U}$ die unitäre Matrix ist

$$\mathcal{U}_{\mu m}^{[L]} = (-)^{L-\mu} \delta_{\mu, -m} \quad (5)$$

Für die Produktdarstellung ergibt sich eingesetzt:

$$\begin{aligned}
 &[\mathcal{U}^{[\tilde{L}_1]} \Pi^{[\tilde{L}_1]} \times \Pi^{[L_2]}][J] = \\
 &= \sum_{\mu_1 \mu_2} (L_1 L_2 J | -\mu_1 \mu_2 M) (-)^{L_1 + \mu_1} \tilde{T}_{L_1 \mu_1} T_{L_2 \mu_2} \\
 &[\Pi^{[\tilde{L}_1]} \times \mathcal{U}^{[L_2]} \Pi^{[L_2]}][\tilde{J}] = \\
 &= \sum_{\mu_1 \mu_2} (L_1 L_2 J | \mu_1 -\mu_2 M) (-)^{L_2 + \mu_2} \tilde{T}_{L_1 \mu_1} T_{L_2 \mu_2}
 \end{aligned} \quad (6)$$

1.2. Umkopplungstheorie für Tensorprodukte bis 4. Ordnung

In diesem Kapitel wird die Eindeutigkeit der Tensorprodukte untersucht, d.h. es wird die Umkopplungstheorie dargestellt, die Tensorprodukte werden klassifiziert und im intrinsischen System explizit angegeben.

Im allgemeinen läßt sich ein irreduzibles Tensorprodukt der Ordnung N ohne Spezifizierung der intermediären Kopplungen auf $N!$ verschiedene Arten darstellen. Es gibt nun unter diesen $N!$ verschiedenen Tensorprodukten ein solches Basissystem, daß sich alle Tensorprodukte als Linearkombination dieses Basissystems

darstellen lassen. Hat man eine mögliche Basis gewählt, so kann man mit Hilfe von Umkopplungstransformationen auf jede andere Basis umrechnen^{4,6}.

Tensorprodukte der Ordnung 2:

Es gibt $2!=2$ verschiedene Produkte $(\pi^{[j_1]} \times \pi^{[j_2]})^{[\mathcal{J}]}$, die sich nur durch einen Phasenfaktor unterscheiden. Im Fall der skalaren Kontraktion ist er $+1$. Die Umkopplungstransformation ist dann die Identität.

Tensorprodukte der Ordnung 3:

Es gibt $3!=6$ Produkte. Die beiden möglichen Basisprodukte

$$[\pi^{[j_1]} \times \pi^{[j_2]})^{[\mathcal{J}_{12}]} \times \pi^{[j_3]})^{[\mathcal{J}]} = [(j_1 j_2) \mathcal{J}_{12} j_3, \mathcal{J}]$$

alle $\mathcal{J}_{12}$ mit $\Delta(j_1 j_2 \mathcal{J}_{12}), \Delta(\mathcal{J}_{12} j_3 \mathcal{J})$ (7)

und

$$[\pi^{[j_1]} \times (\pi^{[j_2]} \times \pi^{[j_3]})^{[\mathcal{J}_{23}]}]^{[\mathcal{J}]} = [j_1 (j_2 j_3) \mathcal{J}_{23}, \mathcal{J}]$$

alle $\mathcal{J}_{23}$ mit $\Delta(j_2 j_3 \mathcal{J}_{23}), \Delta(j_1 \mathcal{J}_{23} \mathcal{J})$ (8)

gehen durch eine unitäre Umkopplungstransformation auseinander hervor:

$$[(j_1 j_2) \mathcal{J}_{12} j_3, \mathcal{J}^M] = \sum_{\mathcal{J}_{23}} \langle (j_1 j_2) \mathcal{J}_{12} j_3, \mathcal{J} | j_1 (j_2 j_3) \mathcal{J}_{23}, \mathcal{J} \rangle [j_1 (j_2 j_3) \mathcal{J}_{23}, \mathcal{J}^M]$$

(9)

wobei

$$\langle (j_1 j_2) \mathcal{J}_{12} j_3, \mathcal{J} | j_1 (j_2 j_3) \mathcal{J}_{23}, \mathcal{J} \rangle = (-)^{j_1+j_2+j_3+\mathcal{J}} [(2\mathcal{J}_{12}+1)(2\mathcal{J}_{23}+1)]^{1/2} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & \mathcal{J}_{12} \\ j_3 & \mathcal{J} & \mathcal{J}_{23} \end{matrix} \right\}$$

(10)

ist, mit dem $6j$ -Symbol in der Konvention von de Shalit, Talmi⁵ und Rothenberg et al.⁷.

Für den Fall der skalaren Transformation ist $J=0$, $J_{12}=j_3$ und $J_{23}=j_1$; daraus folgt:

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_3 & 0 & j_1 \end{matrix} \right\} = (-)^{j_1+j_2+j_3} [(2j_1+1)(2j_3+1)]^{\frac{1}{2}} \quad (11)$$

und das Matrixelement ist:

$$\langle (j_1 j_2) j_3 j_3, 0 | j_1 (j_2 j_3) j_1, 0 \rangle = +1 \quad (12)$$

Beide Basen sind identisch.

Tensorprodukte der Ordnung 4:

Es gibt $4!=24$ Tensorprodukte. Eine mögliche Basis ist:

$$\begin{aligned} & [[\pi^{[j_1]} \times \pi^{[j_2]}]^{[j_{12}]} \times [\pi^{[j_3]} \times \pi^{[j_4]}]^{[j_{34}]}]^{[j]} = \\ & = [(j_1 j_2) j_{12} (j_3 j_4) j_{34}, j] \end{aligned} \quad (13)$$

alle J_{12}, J_{34} mit $\Delta(j_1 j_2 J_{12}), \Delta(j_3 j_4 J_{34}), \Delta(J_{12} J_{34} J)$.

Die einzige wesentlich verschiedene Basis ist (bis auf Faktorenvertauschung):

$$\begin{aligned} & [[\pi^{[j_1]} \times \pi^{[j_3]}]^{[j_{13}]} \times [\pi^{[j_2]} \times \pi^{[j_4]}]^{[j_{24}]}]^{[j]} = \\ & = [(j_1 j_3) j_{13} (j_2 j_4) j_{24}, j] \end{aligned} \quad (14)$$

alle J_{12}, J_{34} mit $\Delta(j_1 j_3 J_{13}), \Delta(j_2 j_4 J_{24}), \Delta(J_{13} J_{24} J)$.

Die Umkopplungstransformation lautet:

$$\begin{aligned} & [(j_1 j_2) j_{12} (j_3 j_4) j_{34}, j^M] = \\ & = \sum_{j_{13} j_{24}} \langle (j_1 j_2) j_{12} (j_3 j_4) j_{34}, j | (j_1 j_3) j_{13} (j_2 j_4) j_{24}, j \rangle \cdot \\ & \quad \cdot [(j_1 j_3) j_{13} (j_2 j_4) j_{24}, j^M] \end{aligned} \quad (15)$$

mit dem Matrixelement:

$$\begin{aligned} & \langle (j_1 j_2) J_{12} (j_3 j_4) J_{34}, J | (j_1 j_3) J_{13} (j_2 j_4) J_{24}, J \rangle = \\ & = [(2J_{12} + 1)(2J_{34} + 1)(2J_{13} + 1)(2J_{24} + 1)]^{1/2} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_3 & j_4 & J_{34} \\ j_{13} & j_{24} & J \end{matrix} \right\} \quad (16) \end{aligned}$$

Man kann das 9j-Symbol mit ⁵ auf tabellierte 6j-Symbole zurückführen:

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_3 & j_4 & J_{34} \\ J_{12} & J_{34} & J \end{matrix} \right\} = \sum_y (-)^{2y} (2y + 1) \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_3 & J_{13} \\ j_{24} & J & y \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_2 & j_4 & J_{24} \\ j_3 & y & J_{34} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} J_{12} & J_{34} & J \\ y & j_1 & j_2 \end{matrix} \right\} \quad (17)$$

Für den Fall der skalaren Transformation erhalten wir:

$$J=0, J_{12}=J_{34}=J', J_{13}=J_{24}=J''$$

$$\begin{aligned} & [(j_1 j_2) J' (j_3 j_4) J', 00] = \quad (18) \\ & = \sum_{J''} \langle (j_1 j_2) J' (j_3 j_4) J', 0 | (j_1 j_3) J'' (j_2 j_4) J'', 0 \rangle [(j_1 j_3) J'' (j_2 j_4) J'', 00] \end{aligned}$$

mit:

$$\begin{aligned} & \langle (j_1 j_2) J' (j_3 j_4) J', 0 | (j_1 j_3) J'' (j_2 j_4) J'', 0 \rangle = \\ & = (2J' + 1)(2J'' + 1) \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & J' \\ j_3 & j_4 & J'' \\ J'' & 0 & 0 \end{matrix} \right\}, \quad (19) \end{aligned}$$

wobei für das 9j-Symbol gilt:

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & J' \\ j_3 & j_4 & J'' \\ J'' & J'' & 0 \end{matrix} \right\} = (-)^{j_2 + j_3 + J' + J''} [(2J' + 1)(2J'' + 1)]^{-1/2} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & J' \\ j_4 & j_3 & J'' \end{matrix} \right\} \quad (20)$$

Wir können somit schreiben:

$$\begin{aligned} & [(j_1 j_2) J' (j_3 j_4) J', 00] = \\ & = \sum_{J''} (-)^{j_2 + j_3 + J' + J''} [(2J' + 1)(2J'' + 1)]^{1/2} \cdot \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & J' \\ j_4 & j_3 & J'' \end{matrix} \right\} [(j_1 j_3) J'' (j_2 j_4) J'', 00] \quad (21) \end{aligned}$$

1.3. Definition der irreduziblen Oberflächen-Multipol-Tensoren

Im Rahmen des Kollektivmodells³ werden die kollektiven Nukleonenbewegungen im niederenergetischen Bereich phänomenologisch durch Veränderung der Kernoberfläche beschrieben.

Die Multipolentwicklung der Kernoberfläche nach skalaren Produkten $[\alpha^{[L]} \times Y^{[L]}]^{[0]}$ irreduzibler $\alpha^{[L]}$, $Y^{[L]}$ definiert die kollektiven Koordinaten $\alpha_{L\mu}$ im Laborsystem:

$$R(\theta, \varphi) = R_0 \left(1 + \sum_{L=2}^{\infty} (-)^L \sqrt{2L+1} [\alpha^{[L]} \times Y^{[L]}]^{[0]} \right) \quad (22)$$

$$\text{mit } \alpha^{[L]} = \{ \alpha_{L\mu} \} ; Y^{[L]} = \{ Y_{L\mu} \} \quad (23)$$

Für den Radius R_0 macht man den Ansatz:

$$R_0 = r_0 A^{1/3} \quad \text{mit } r_0 = 1.20 \text{ fm} \quad (24)$$

Zwischen R_0 und dem mittleren quadratischen Radius $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$ besteht der Zusammenhang

$$R_0 = \sqrt{\frac{5}{3}} \sqrt{\langle r^2 \rangle} \quad (25)$$

$$\text{mit } \langle r^2 \rangle = \int_V r^2 \rho(\vec{r}) r^2 dr d\Omega, \quad (26)$$

wobei über das Kernvolumen integriert wird.

Da Realität der $\alpha_{L\mu}$ gefordert wird, gilt

$$\alpha_{L\mu}^* = (-)^{\mu} \alpha_{L-\mu} \quad (27)$$

Sowohl die $\alpha^{[L]}$ als auch die $Y^{[L]}$ transformieren sich als kogrediente irreduzible Tensoren L-ter Stufe unter der $(2L+1)$ -dimensionalen Darstellung

$$\mathcal{D}^L = \{ \mathcal{D}_{\mu'\mu}^L \} \text{ der } SO(3).$$

Bei einer Raumdrehung vom Labor-System in das kernfeste System um die Euler-Winkel θ_j gilt:

$$\alpha_{L\mu} = \alpha'_{L\mu} = \sum_{\mu'} \mathcal{D}_{\mu'\mu}^L(\theta_j) \alpha_{L\mu'} \quad (28)$$

Auf Grund der Symmetrien des Kerns gilt im intrinsischen System

$a_{11}=a_{1-1}=0$. Für den Radius ergibt sich dann:

$$R(\theta, \varphi) = R_0 \left\{ 1 + \sum_{L=2}^{\infty} \sum_{\mu=-L}^{+L} (-)^{\mu} \alpha_{L-\mu} Y_{L\mu} \right\} = \quad (29)$$

$$= R_0 \left\{ 1 + \sum_{L=2}^{\infty} \left[\alpha_{L0} Y_{L0} + \sum_{\mu=1}^L \alpha_{L\mu} (Y_{L\mu} + Y_{L\mu}^*) \right] \right\}$$

Die $\alpha_{L\mu}$ sind reelle Größen.

Für die weiteren Rechnungen wählen wir $L=2$, d.h. wir beschränken uns auf Kernquadrupoldeformationen.

1.4. Der Hamiltonoperator für Oberflächen-Quadrupol-Oszillationen

Die kollektiven Koordinaten $\alpha_{2\mu}$ ($\mu=-2, \dots, +2$) sind definiert über

$$R(\theta, \varphi) = R_0 \left(1 + \sum_{\mu} \alpha_{2\mu} (-)^{\mu} Y_{2-\mu} \right), \quad (30)$$

wobei R_0 der Kernradius im sphärischen Zustand ist. Diese fünf kollektiven Variablen beschreiben gleichermaßen Rotationen und Vibrationen des Kerns. Wie schon oben beschrieben, besitzen die Koordinaten und die Kugelflächenfunktionen die Eigenschaft:

$$\begin{aligned} \alpha_{2\mu} &= (-)^{\mu} \alpha_{2-\mu}^* \\ Y_{2\mu} &= (-)^{\mu} Y_{2-\mu}^* \end{aligned} \quad (31)$$

Die zu den $\alpha_{2\mu}$ kanonisch konjugierten Impulse sind

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}_{2\mu}} \quad (32)$$

mit L als Lagrange-Funktion. Die konjugierten Impulse verhalten sich zu den $\alpha_{2\mu}$ kontragredient.

Der Hamiltonoperator lautet in diesen Koordinaten:

$$H_Q = T(\dot{\alpha}_{2\mu}, \alpha_{2\mu}) + V(\alpha_{2\mu}) \quad (33)$$

oder ausführlicher geschrieben:

$$\begin{aligned} H_Q &= P_2 [\pi^{[2]} \times \pi^{[2]}]^{[0]} + P_3 [[\pi^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[2]} \times \pi^{[2]}]^{[0]} \\ &+ C_2 [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]} + C_3 [[\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]} \\ &+ C_4 [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]} [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]} \\ &+ C_5 [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]} [[\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]} \\ &+ C_6 [[\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]} [[\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]} \\ &+ D_6 [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]} [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]} [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]} \end{aligned} \quad (34)$$

Auf Grund der Vermischung von Rotationen und Vibrationen ist dieser Darstellung des Hamilton-Operators die Beschaffenheit des Kerns nicht anzusehen. Um die Rotationen abzuspalten, transformieren wir in das intrinsische System. Als Intrinsic-System wählen wir ein Koordinatensystem, in dem die Deviationsmomente α_{xy} , α_{xz} und α_{yz} verschwinden, die also mit den Hauptachsen zusammenfallen.

$$\alpha_{xy} = \alpha_{xz} = \alpha_{yz} = 0 \quad (35)$$

$$\alpha_{21} = \alpha_{2-1} = 0, \quad \alpha_{22} = \alpha_{2-2}$$

$\alpha_{2\mu}$ hat als von Null verschiedene Komponenten

$$\alpha_0 \equiv \alpha_{20} \quad ; \quad \alpha_2 \equiv \alpha_{22} \quad (36)$$

Verwenden wir statt a_0 und a_2 die zugehörigen "Polarkoordinaten" β und μ , dann ist

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \beta \cos \mu \\ \alpha_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \beta \sin \mu \end{aligned} \quad (37)$$

Die Kerngestalt drückt sich jetzt allein durch diese beiden Koordinaten aus.

$$\begin{aligned} R(\theta, \varphi) &= R_0 [1 + \alpha_0 Y_{20} + \alpha_2 (Y_{22} + Y_{2-2})] = \\ &= R_0 [1 + \beta (\sqrt{\frac{5}{16\pi}} \cos \mu (3 \cos^2 \theta - 1) + \sqrt{\frac{15}{16\pi}} \sin \mu \sin^2 \theta \cos 2\varphi)] \end{aligned} \quad (38)$$

β mißt die gesamte Deformation, μ gibt die Abweichung von der Axialsymmetrie an.

Mit Hilfe von β und μ schreibt sich der Potentialteil des Hamiltonoperators als:

$$\begin{aligned} V(\beta, \mu) &= C_2 \frac{1}{\sqrt{5}} \beta^2 - C_3 \sqrt{\frac{2}{35}} \beta^3 \cos 3\mu + \\ &+ C_4 \frac{1}{5} \beta^4 - C_5 \sqrt{\frac{2}{175}} \beta^5 \cos 3\mu + \\ &+ C_5 \frac{2}{35} \beta^6 \cos^2 3\mu + D_6 \frac{1}{5\sqrt{5}} \beta^6 \end{aligned} \quad (39)$$

Trägt man a_0 und a_2 auf zwei orthogonale Achsen auf, so erhält man über der a_0/a_2 -Ebene ein dreidimensionales Potentialgebirge, welches, auf die Ebene projiziert, die sogenannte Potentialenergiefläche ergibt. Diese vermittelt ein anschauliches Bild des zugehörigen Kerntyps. Damit ein Vergleich zwischen den verschiedenen

Atomkernen möglich ist, wurde die potentielle Energie für die sphärische Gestalt auf Null normiert.

Da es insgesamt 24 Möglichkeiten gibt, ein rechtshändiges Koordinatensystem auf die Hauptachsen eines Kerns zu legen, führt diese Vorschrift zu einer Fläche, in der mehrere Punkte die gleiche Kernform in einem unterschiedlich gelagerten Hauptachsensystem beschreiben. Es gibt sechs Felder, die jeweils die vollständige Information über die Kerngestalt enthalten. Zur Darstellung der Potentialflächen wird der Bereich zwischen $\mu=0^\circ$ und $\mu=60^\circ$ gewählt. Der Ursprung entspricht einem sphärischen Kerntyp, bei $\mu=60^\circ$ bzw. $\mu=0^\circ$ liegen die oblaten bzw. die prolatten Kerne, dazwischen befinden sich die asymmetrischen Formen.

Über die Potentialenergiefläche kommt man zu einem bestimmten Kerntyp. Die Lage und die Tiefe der Minima geben Aufschluß über die Kerngestalt und die Stabilität des Kerns. Barrieren zwischen zwei Minima deuten auf isomere Zustände.

1.5. Das hydrodynamische Modell

In diesem Kapitel wird das Modell von Steinwedel und Jensen² behandelt. Darin wird der Kern als Flüssigkeitstropfen interpretiert, bei dem die Protonen- und die Neutronenflüssigkeit gegeneinander schwingen.

Fig.1 zeigt die Normalschwingungen der Dipolriesenresonanzen, Fig.2 die Normalschwingungen der Quadrupolriesenresonanzen und Fig.3 die Achsen, entlang denen Quadrupolschwingungen möglich sind. In Fig.1-2 sind die Protonen mit +++ und die Neutronen mit --- bezeichnet⁸.

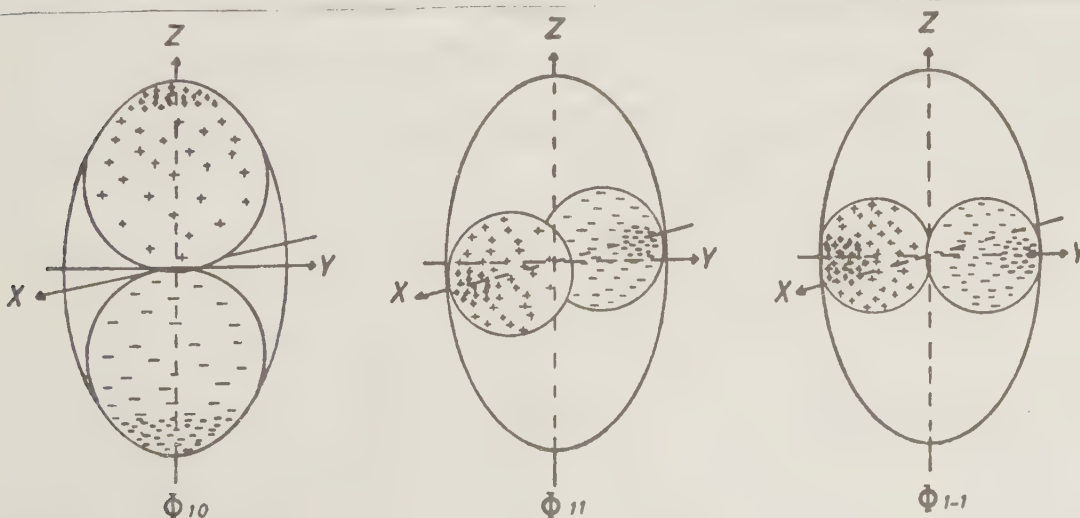


Fig.1

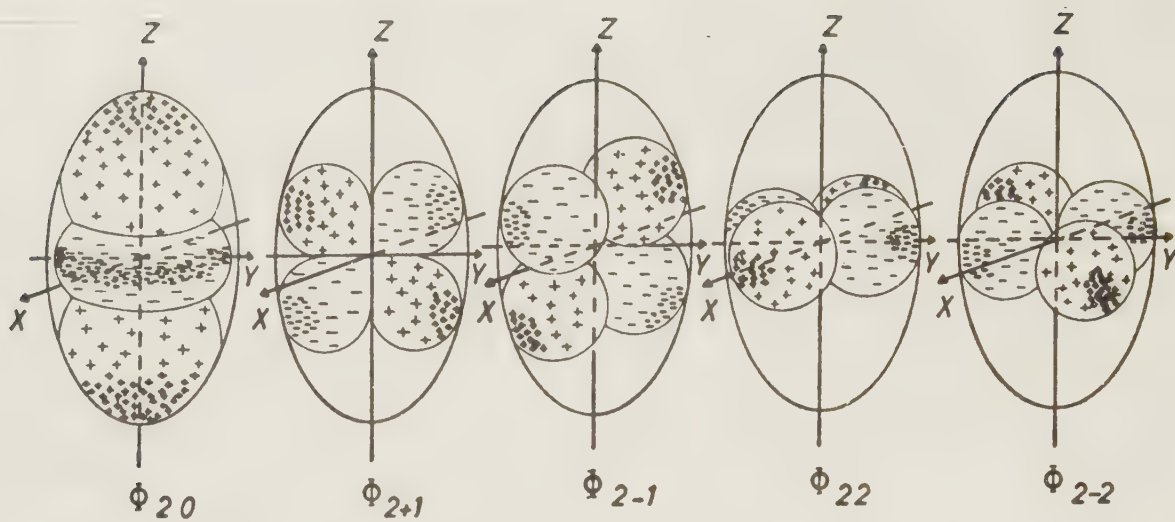


Fig.2

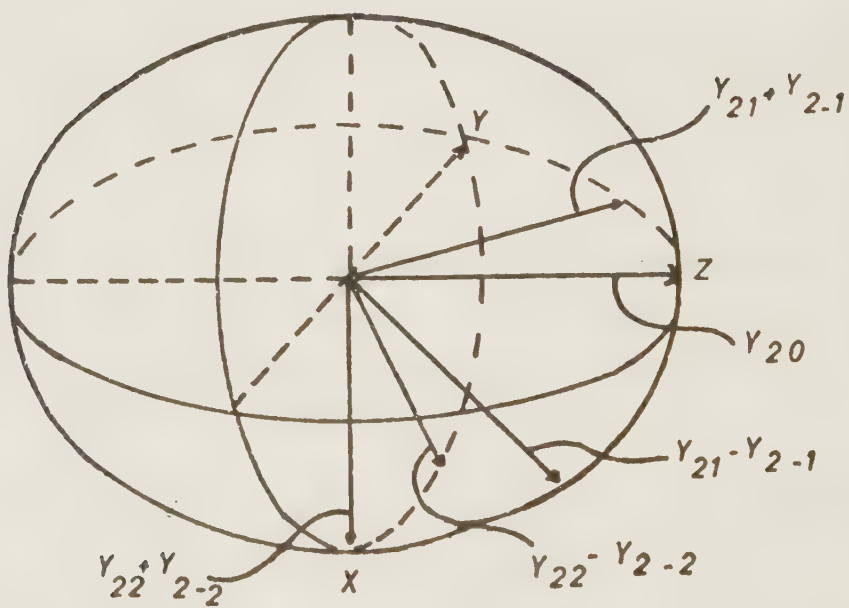


Fig.3

Es wird angenommen, daß der Kern konstante Dichte ρ_0 und konstante Teilchenzahl hat. Die Gesamtdichte ist die Summe aus der Protonendichte ρ_P und der Neutronendichte ρ_N .

$$\rho_0(\vec{r}) = \rho_P(\vec{r}, t) + \rho_N(\vec{r}, t)$$

$$\text{mit } \rho_P = \rho_P^{(0)} + \eta(\vec{r}, t) ; \rho_N = \rho_N^{(0)} - \eta(\vec{r}, t) \quad (40)$$

$$\rho_P^{(0)} = \frac{Z}{A} \rho_0 ; \rho_N^{(0)} = \frac{N}{A} \rho_0$$

$$\frac{4\pi}{3} R^3 \rho_0 = 1$$

wobei η die lokale Dichteschwankung darstellt.

Die Kontinuitätsgleichungen lauten:

$$\frac{\partial \rho_P}{\partial t} + \text{div}(\rho_P \vec{v}_P) = 0 ; \frac{\partial \rho_N}{\partial t} + \text{div}(\rho_N \vec{v}_N) = 0 \quad (41)$$

Aus der Kernoberfläche sollen keine Protonen oder Neutronen austreten, d.h.

$$\vec{n} \cdot \vec{v}_P \big|_{r=R(\vartheta, \varphi)} = 0 ; \vec{n} \cdot \vec{v}_N \big|_{r=R(\vartheta, \varphi)} = 0. \quad (42)$$

Die Bewegungsgleichungen für das System werden mit Hilfe des Hamilton'schen Prinzips

$$\delta \int L dt = 0 \quad (43)$$

hergeleitet, wobei $L = T - U$ die Lagrangefunktion ist und T und U die kinetische bzw. die potentielle Energie bedeuten. Das Prinzip lautet ausgeschrieben:

$$\int dt (\delta T - \delta U + \delta N + \delta A) = 0 \quad (44)$$

Hier berücksichtigt der dritte Term die Erhaltung der Teilchenzahl und der letzte Term stellt die Dämpfung dar.

Es gelten schließlich folgende Bewegungsgleichungen:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho_P + \frac{\varepsilon'' \rho_P \rho_N}{M} \nabla^2 \rho_P - T \frac{\partial}{\partial t} \rho_P = 0$$

$$\text{wobei } \varepsilon = \alpha \frac{(\rho_P - \rho_N)^2}{\rho_0} = \alpha \frac{\rho_0 - 2\rho_P}{\rho_0}$$

$$\varepsilon' = \frac{d\varepsilon}{d\rho_P} = -4\alpha \frac{\rho_0 - 2\rho_P}{\rho_0^2} \quad (45)$$

$$\varepsilon'' = \frac{d\varepsilon'}{d\rho_P} = \frac{8\alpha}{\rho_0^2} \quad \text{ist.}$$

Hier seien noch einige Bemerkungen zum Modell amgefügt.

Im Modell wird die Annahme der konstanten Nukleonendichte bis zum Kernrand gemacht. Experimente von Hofstadter⁹ ergeben aber konstante Nukleonendichte nur im Kerninnern und am Rand eine unterschiedliche Abfallbreite.

Diese Aussagen bedeuten keinen wirklichen Widerspruch, läßt man in unserem Modell Schwingungen um die Gleichgewichtslage zu. Dies kommt einer Verschmierung des Kernrandes gleich und wirkt im Zeitmittel wie ein Dichteabfall an der Kernoberfläche. Bei den Rechnungen wird Zeitunabhängigkeit der Oberflächengestalt vorausgesetzt. Diese Annahme wird durch Experimente gerechtfertigt, die zeigen, daß sich die Frequenz der Dichteschwankung um eine Größenordnung von derjenigen der Oberflächenvibration unterscheidet.

Auf Grund der Austauschkräfte ist ein Ladungsaustausch zwischen je einem Proton und einem Neutron denkbar. Durch Einführung einer effektiven Masse trägt man diesem Umstand Rechnung

$$M^* = \frac{M}{1+\alpha} \quad (46)$$

1.5.1. Der Oberflächen-Normalen-Vektor

Ziel der folgenden Kapitel ist es, einen Lösungsansatz für die Bewegungsgleichungen zu finden, die wir nach dem hydrodynamischen Modell abgeleitet haben. Die Randbedingung lautet:

$$\vec{n} \cdot \text{grad } f \big|_{r=R(\vartheta, \varphi)} = 0 \quad (47)$$

Zunächst soll der Normalen-Vektor bestimmt werden.

Die Oberfläche des Kerns wird beschrieben durch

$$R(\vartheta, \varphi) = R_0 \left(1 + \sum_{\lambda} (-)^{\lambda} \sqrt{2\lambda+1} [\alpha^{[\lambda]} \times \gamma^{[\lambda]}]^{[0]} \right) \quad (48)$$

mit $R_0 = 1.2 \text{ fm}^{1/3}$.

Sei $\vec{r}$ ein Ortsvektor eines Oberflächenpunktes.

$$\vec{r} = R(\vartheta, \varphi) \cdot \vec{n}_r$$

oder

$$\vec{r} = R_0 \left(1 + \sum_{\lambda} (-)^{\lambda} \sqrt{2\lambda+1} [\alpha^{[\lambda]} \times \gamma^{[\lambda]}]^{[0]} \right) \vec{n}_r \quad (49)$$

ϑ und φ können als Parameter auf einer solchen Fläche aufgefaßt werden.

Für den Normalen-Einheitsvektor gilt dann:

$$\vec{n}' = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi}}{\left| \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} \right|} \quad (50)$$

Es ist:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} &= n_r \frac{\partial R}{\partial \vartheta} + R \cdot \frac{\partial n_r}{\partial \vartheta} \\ &= n_r \frac{\partial R}{\partial \vartheta} + R \cdot 1_{\vartheta} \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} &= n_r \frac{\partial R}{\partial \varphi} + R \cdot \frac{\partial n_r}{\partial \varphi} \\ &= n_r \frac{\partial R}{\partial \varphi} + R \cdot \sin \vartheta n_\varphi \end{aligned} \quad (52)$$

Aus Gl.51 und Gl.52 folgt:

$$dn_r = n_\vartheta d\vartheta + n_\varphi \sin \vartheta d\varphi \quad (53)$$

Aus diesen Gleichungen erhält man:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} = R^2 \sin \vartheta n_r - R \frac{\partial R}{\partial \vartheta} \sin \vartheta n_\vartheta - R \frac{\partial R}{\partial \varphi} n_\varphi \quad (54)$$

Zur Erfüllung der Randbedingung kommt es nur auf den Betrag des Normalen-Vektors an. Hier sei also jeder Vektor, der parallel zum Einheitsvektor ist, mit $\vec{n}$ bezeichnet.

$$\vec{n} = R n_r - \frac{\partial R}{\partial \vartheta} n_\vartheta - \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial R}{\partial \varphi} n_\varphi \quad (55)$$

Wir setzen:

$$\tilde{\Sigma} \equiv \sum_{\lambda} (-)^{\lambda} \sqrt{2\lambda+1} [\alpha^{[\lambda]} \times \gamma^{[\lambda]}]^{[0]} \quad (56)$$

Daraus folgt, in Gl.55 eingesetzt:

$$\begin{aligned} \vec{n} &= n_r - n_r \tilde{\Sigma} - n_\vartheta \frac{\partial \tilde{\Sigma}}{\partial \vartheta} - \frac{n_\varphi}{\sin \vartheta} \frac{\partial \tilde{\Sigma}}{\partial \varphi} = \\ &= n_r + 2n_r \tilde{\Sigma} - \left\{ n_r \frac{\partial}{\partial r} r \tilde{\Sigma} + \frac{1}{r} n_\vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} r \tilde{\Sigma} + \frac{1}{r \sin \vartheta} n_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} r \tilde{\Sigma} \right\} = \\ &= n_r + 2n_r \tilde{\Sigma} - \nabla_r \tilde{\Sigma} \end{aligned} \quad (57)$$

Wendet man auf diesen Ausdruck die im mathematischen Anhang angegebene Gradientenformel an, so erhält man:

$$\begin{aligned} \nabla_r \tilde{\Sigma} = & \sum_{\lambda} (-)^{\lambda} \sqrt{\lambda} (\lambda+2) [\alpha^{[\lambda]} \times Y^{[\lambda-1]} \times \xi^{[1]}]^{[0]} \\ & + \sum_{\lambda} (-)^{\lambda} \sqrt{\lambda+1} (\lambda+1) [\alpha^{[\lambda]} \times Y^{[\lambda+1]} \times \xi^{[1]}]^{[0]} \end{aligned} \quad (58)$$

Es ist:

$$\begin{aligned} n_r = & -\sqrt{4\pi} [Y^{[1]} \times \xi^{[1]}]^{[0]} \\ n_r \tilde{\Sigma} = & -\sum_{\lambda} (-)^{\lambda} \sqrt{\lambda+1} [\alpha^{[\lambda]} \times Y^{[\lambda+1]} \times \xi^{[1]}]^{[0]} \\ & + \sum_{\lambda} (-)^{\lambda} \sqrt{\lambda} [\alpha^{[\lambda]} \times Y^{[\lambda-1]} \times \xi^{[1]}]^{[0]}, \end{aligned} \quad (59)$$

womit für den Normalen-Vektor entgültig folgt:

$$\begin{aligned} \vec{n} = & \sqrt{4\pi} [Y^{[1]} \times \xi^{[1]}]^{[0]} + \\ & + \sum_{\lambda} (-)^{\lambda} \lambda \sqrt{\lambda} [\alpha^{[\lambda]} \times Y^{[\lambda-1]} \times \xi^{[1]}]^{[0]} \\ & + \sum_{\lambda} (-)^{\lambda} (\lambda+1) \sqrt{\lambda+1} [\alpha^{[\lambda]} \times Y^{[\lambda+1]} \times \xi^{[1]}]^{[0]} \end{aligned} \quad (60)$$

1.5.2. Volumenkonstanz und Schwerpunkterhaltung

Der Radius R_0 wird so gewählt, daß das zugehörige Kugelvolumen mit dem Kernvolumen in nullter Näherung übereinstimmt. Bei deformierten Kernen nimmt man eine Renormierung vor, die zum ursprünglichen Radius R_0 einen Zusatzterm liefert.

$$\frac{4\pi}{3} R_0^3 \stackrel{!}{=} \int d^3x = \int d\Omega \int_0^{R(\vartheta)} r^2 dr \quad (61)$$

mit
$$R(\vartheta, \rho) = R_0 \left(1 + \sum_{\lambda} (-)^{\lambda} \sqrt{2\lambda+1} [\alpha^{[\lambda]} \times Y^{[\lambda]}]^{[0]} \right)$$

Nimmt man Glieder bis zweiter Ordnung in $\alpha^{[2]}$ mit, so erhält man:

$$\begin{aligned} 0 = & \sum_{\lambda} (-)^{\lambda} \sqrt{2\lambda+1} \int d\Omega [\alpha^{[\lambda]} \times Y^{[\lambda]} \times Y^{[0]}]^{[0]} + \\ & + \sum_{\lambda, \lambda'} (-)^{\lambda+\lambda'} \sqrt{2\lambda+1} \sqrt{2\lambda'+1} \int d\Omega [[\alpha^{[\lambda]} \times Y^{[\lambda]}]^{[0]} \times [\alpha^{[\lambda']} \times Y^{[\lambda']}]^{[0]} \times Y^{[0]}]^{[0]} \end{aligned} \quad (62)$$

Mit den Formeln aus dem mathematischen Anhang (Kapitel 6.1) vereinfacht sich der Ausdruck zu:

$$0 = \alpha^{[0]}_0 + \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sum_{\lambda} (-)^{\lambda} \sqrt{2\lambda+1} [\alpha^{[\lambda]} \times \alpha^{[\lambda]}]^{[0]} \quad (63)$$

Die Lage des Koordinatenursprungs kann mit dem Schwerpunkt zusammengelegt werden. Daraus folgt:

$$\int \vec{r} d^3x = 0 \quad (64)$$

Das liefert eine Bedingung für die Oberflächenparameter

$$\vec{0} = \int d^3x \vec{r} [\gamma^{[1]} \times \xi^{[1]}]^{[0]} \quad (65)$$

und wegen

$$\vec{r} = -\sqrt{4\pi} \vec{r} [\gamma^{[1]} \times \xi^{[1]}]^{[0]} \quad (66)$$

folgt

$$\vec{0} = \int d\Omega [\gamma^{[1]} \times \xi^{[1]}]^{[0]} \int_0^{R(\vartheta)} r^3 dr \quad (67)$$

Es ergibt sich bis zu Gliedern zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned} \vec{0} = & \int d\Omega [\xi^{[1]} \times \gamma^{[1]} \times \gamma^{[0]}]^{[0]} + \\ & + 4 \sum_{\lambda} (-)^{\lambda} \sqrt{2\lambda+1} \int d\Omega [[\xi^{[1]} \times \gamma^{[1]}]^{[0]} \times \\ & \times [\alpha^{[\lambda]} \times \gamma^{[\lambda]}]^{[0]} \times \gamma^{[0]}]^{[0]} \\ & + \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \cdot 6 \cdot \sum_{\lambda, \lambda'} (-)^{\lambda+\lambda'} \sqrt{2\lambda+1} \sqrt{2\lambda'+1} \int d\Omega [[\xi^{[1]} \times \gamma^{[1]}]^{[0]} \times \\ & \times [\alpha^{[\lambda]} \times \gamma^{[\lambda]}]^{[0]} \times [\alpha^{[\lambda']} \times \gamma^{[\lambda']}]^{[0]}] \end{aligned} \quad (68)$$

Mit Hilfe der Formeln aus dem mathematischen Anhang (Kapitel 6.1)

folgt:

$$\begin{aligned} \vec{0} = & [\xi^{[1]} \times \alpha^{[1]}]^{[0]} - \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sum_{\lambda, \lambda'} \sqrt{2\lambda+1} \sqrt{2\lambda'+1} \cdot \\ & \cdot \begin{pmatrix} \lambda & \lambda' & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} [\xi^{[1]} \times \alpha^{[\lambda]} \times \alpha^{[\lambda']}]^{[0]} \end{aligned} \quad (69)$$

Da die $\xi^{[1]}$ linear unabhängig sind, ergibt sich:

$$\begin{aligned} \vec{0} = & \alpha_{\mu}^{[1]} - \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sum_{\lambda, \lambda'} \sqrt{2\lambda+1} \sqrt{2\lambda'+1} \cdot \\ & \cdot \begin{pmatrix} \lambda & \lambda' & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} [\alpha^{[\lambda]} \times \alpha^{[\lambda']}]^{[1]} \end{aligned} \quad (70)$$

Diese Bedingung ist für gerade λ stets erfüllt. Bei allen

weiteren Rechnungen wird $\lambda=2$ gesetzt. Die Renormierungsbedingung liefert dann:

$$\alpha_0^{[0]} = - \sqrt{\frac{5}{4\pi}} [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]} \quad (71)$$

1.5.3. Lösung der Wellengleichung; Lösungsansatz

In diesem Abschnitt soll ein Lösungsansatz angegeben und die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + T \frac{\partial \eta}{\partial t} + n^2 \Delta \eta = 0 \quad (72)$$

mit der Randbedingung

$$\vec{n} \cdot \text{grad } \eta \Big|_{r=R(\vartheta, \varphi)} = 0 \quad (73)$$

gelöst werden. Als Lösungsansatz wählt man ein Produkt einer Zeit- und einer Ortsfunktion. Für alle l bildet $\{j_l(k_e r) Y_m^{[l]}(\vartheta, \varphi)\}$ eine Eigenfunktion des Operators Δ zum Eigenwert k_l^2 , die im Ursprung endliche Werte annimmt.

Stock^{10,11} hat gezeigt, daß der folgende Ansatz die Randbedingung (Gl.73) erfüllt:

$$\eta = \sum_{l=0}^{\infty} \eta_l \quad (74)$$

mit

$$\begin{aligned} \eta_l = & j_l(k_e r) [Q^{[l]} \times Y^{[l]}]^{[0]} \\ & + \delta_l r \frac{\partial j_l}{\partial r}(k_e r) [Q^{[l]} \times \alpha^{[2]} \times Y^{[l]}]^{[0]} \\ & + \delta_l^2 \frac{r^2}{2} \frac{\partial^2 j_l}{\partial r^2}(k_e r) [Q^{[l]} \times \alpha^{[2]} \times [\alpha^{[2]} \times Y^{[l]}]^{[l]}]^{[0]} \\ & + \Delta_l r \frac{\partial j_l}{\partial r}(k_e r) [Q^{[l]} \times \alpha^{[0]} \times Y^{[l]}]^{[0]} \\ & + \gamma_{l l-2} r \frac{\partial j_l}{\partial r}(k_e r) [Q^{[l]} \times \alpha^{[2]} \times [\alpha^{[2]} \times Y^{[l]}]^{[l-2]}]^{[0]} \\ & + \gamma_{l l} r \frac{\partial j_l}{\partial r}(k_e r) [Q^{[l]} \times \alpha^{[2]} \times [\alpha^{[2]} \times Y^{[l]}]^{[l]}]^{[0]} \\ & + \gamma_{l l+2} r \frac{\partial j_l}{\partial r}(k_e r) [Q^{[l]} \times \alpha^{[2]} \times [\alpha^{[2]} \times Y^{[l]}]^{[l+2]}]^{[0]} + \end{aligned} \quad (75)$$

$$\begin{aligned}
 & + \varepsilon_{\ell \ell-2} j_{\ell-2}(k_{\ell} r) [Q^{[\ell]} \times \alpha^{[2]} \times Y^{[\ell-2]}]^{[0]} \\
 & + \varepsilon_{\ell \ell-2} \delta_{\ell} + \frac{\partial j_{\ell-2}}{\partial r}(k_{\ell} r) [Q^{[\ell]} \times \alpha^{[2]} \times [\alpha^{[2]} \times Y^{[\ell-2]}]^{[\ell]}]^{[0]} \\
 & + \varepsilon_{\ell \ell+2} \delta_{\ell} + \frac{\partial j_{\ell+2}}{\partial r}(k_{\ell} r) [Q^{[\ell]} \times \alpha^{[2]} \times [\alpha^{[2]} \times Y^{[\ell+2]}]^{[\ell]}]^{[0]} \\
 & + \varepsilon_{\ell \ell+2} j_{\ell+2}(k_{\ell} r) [Q^{[\ell]} \times \alpha^{[2]} \times Y^{[\ell+2]}]^{[0]} \\
 & + j_{\ell \ell-4 \ell-2} j_{\ell-4}(k_{\ell} r) [Q^{[\ell]} \times \alpha^{[2]} \times [\alpha^{[2]} \times Y^{[\ell-4]}]^{[\ell-2]}]^{[0]} \\
 & + j_{\ell \ell-2 \ell-2} j_{\ell-2}(k_{\ell} r) [Q^{[\ell]} \times \alpha^{[2]} \times [\alpha^{[2]} \times Y^{[\ell-2]}]^{[\ell-2]}]^{[0]} \\
 & + j_{\ell \ell-2 \ell} j_{\ell-2}(k_{\ell} r) [Q^{[\ell]} \times \alpha^{[2]} \times [\alpha^{[2]} \times Y^{[\ell-2]}]^{[\ell]}]^{[0]} \\
 & + j_{\ell \ell+2 \ell} j_{\ell+2}(k_{\ell} r) [Q^{[\ell]} \times \alpha^{[2]} \times [\alpha^{[2]} \times Y^{[\ell+2]}]^{[\ell]}]^{[0]} \\
 & + j_{\ell \ell+2 \ell+2} j_{\ell+2}(k_{\ell} r) [Q^{[\ell]} \times \alpha^{[2]} \times [\alpha^{[2]} \times Y^{[\ell+2]}]^{[\ell+2]}]^{[0]} \\
 & + j_{\ell \ell+4 \ell+2} j_{\ell+4}(k_{\ell} r) [Q^{[\ell]} \times \alpha^{[2]} \times [\alpha^{[2]} \times Y^{[\ell+4]}]^{[\ell+2]}]^{[0]}
 \end{aligned}$$

Der Richtungsabhängigkeit der Eigenwerte wird durch die Terme mit δ_{ℓ} , Δ_{ℓ} und $j_{\ell 0}$ Rechnung getragen.

Folgende Rechnungen sind anschließend durchzuführen, die hier im einzelnen nicht ausgeführt werden. Sie sind in ¹⁰ zu finden.

- a) Gradientenbildung von η ($\nabla \eta$).
- b) Multiplikation mit dem Normalenvektor $\vec{n}$.
- c) Entwicklung um R_0 , um die implizite Abhängigkeit der dabei auftretenden Radialfunktionen von den Winkeln zu beseitigen.

- d) Bestimmung der Konstanten durch Koeffizientenvergleich.

Es werden bei allen Rechnungen nur Glieder bis zweiter Ordnung in $\alpha^{[2]}$ berücksichtigt. Die Koeffizienten des Ansatzes sind im Anhang in Tab.1 zu finden, die aus ¹⁰ entnommen wurden.

1.6. Die Energien der Riesenresonanzen

Bei Vernachlässigung der Coulomb-Wechselwirkung sowie des Reibungsterms, ergibt sich nach dem hydrodynamischen Modell für die Energie:

$$E = T + V$$

$$= \frac{M}{2} \rho_{red}^{(0)} \int v^2 d^3x + \frac{\chi}{\epsilon_0} \int (\rho_p - \rho_n)^2 d^3x \quad (76)$$

mit χ als dem Symmetrieparameter aus der Bethe-Weizsäcker-Formel.
Mit

$$\rho_p = \rho_p^{(0)} + \eta \quad \text{und} \quad \rho_n = \rho_n^{(0)} - \eta \quad (77)$$

ergibt sich für das Potential

$$V = \frac{\chi}{\epsilon_0} \int (\rho_p^{(0)} - \rho_n^{(0)} + 2\eta)^2 d^3x \quad (78)$$

Nimmt man die Kernform als zeitlich unverändert an, so folgt, daß der Term

$$\frac{\chi}{\epsilon_0} (\rho_p^{(0)} - \rho_n^{(0)}) \int d^3x \quad (79)$$

konstant ist und deshalb vernachlässigt werden kann. Es verbleibt:

$$V = \frac{4\chi}{\epsilon_0} (\rho_p^{(0)} - \rho_n^{(0)}) \int \eta d^3x + \frac{4\chi}{\epsilon_0} \int \eta^2 d^3x \quad (80)$$

Stock¹⁰ hat in seiner Arbeit das Integral gelöst und erhält:

$$\int \eta d^3x = - \sum_{\ell, n} k_{\ell}^{(n)-2} \int \text{grad } \eta_{\ell}^{(n)} d\vec{o} = 0 \quad (81)$$

Für die Energie bleibt somit:

$$E = \frac{M}{2} \rho_{red}^{(0)} \int v^2 d^3x + \frac{4\chi}{\epsilon_0} \int \eta^2 d^3x \quad (82)$$

Diese beiden Terme wurden von Stock¹⁰ ausführlich behandelt.

Hier sei das Ergebnis angegeben:

$$E = \sum_{\ell} E_{\ell} \quad (83)$$

mit

$$E_{\ell} = \frac{M}{2} \rho_{red}^{(0)} \int (\text{grad } \rho_{\ell})^2 d^3x + \frac{4\chi}{\epsilon_0} \int \eta_{\ell}^2 d^3x \quad (84)$$

Sei

$$C_{\ell}' = (-)^{\ell} \sqrt{2\ell+1} C_{\ell} \quad \text{und} \quad (85)$$

$$B_{\ell}' = (-)^{\ell} \sqrt{2\ell+1} B_{\ell}$$

so ergibt sich für die Energien die Beziehung:

$$\begin{aligned}
 E_e = & \frac{1}{2} \frac{\epsilon_{red}^{(0)}}{R_0^3 M} k_e^2 \frac{1}{B_e'} (-)^e \sqrt{2e+1} [u\pi^{[e]} \times u\pi^{[e]}]^{[0]} \\
 & + \frac{1}{2} \frac{8\pi}{\epsilon_0} R_0^3 C_e' (-)^e \sqrt{2e+1} [Q^{[e]} \times Q^{[e]}]^{[0]} \\
 & + \frac{1}{2} \frac{\epsilon_{red}^{(0)}}{R_0^3 M} k_e^2 \frac{1}{B_e} p_{e1} \left[[u\pi^{[e]} \times u\pi^{[e]}]^{[2]} \times \alpha^{[2]} \right]^{[0]} \\
 & + \frac{1}{2} \frac{8\pi}{\epsilon_0} R_0^3 C_e q_{e1} \left[[Q^{[e]} \times Q^{[e]}]^{[2]} \times \alpha^{[2]} \right]^{[0]} \quad (86) \\
 & + \frac{1}{2} \frac{\epsilon_{red}^{(0)}}{R_0^3 M} k_e^2 \frac{1}{B_e} \sum_{\sigma=0,2,4} p_{e\sigma} \left[[u\pi^{[e]} \times u\pi^{[e]}]^{[6]} \times [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[6]} \right]^{[0]} \\
 & + \frac{1}{2} \frac{8\pi}{\epsilon_0} R_0^3 C_e \sum_{\sigma=0,2,4} q_{e\sigma} \left[[Q^{[e]} \times Q^{[e]}]^{[6]} \times [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[6]} \right]^{[0]}
 \end{aligned}$$

mit den Abkürzungen:

$$\begin{aligned}
 p_{e1} &= (-)^e \sqrt{2e+1} (4\delta_e - b_{e1}) \\
 p_{e\sigma} &= (-)^e \sqrt{2e+1} (4\hat{f}_{e\sigma} - b_{e\sigma} + (6\delta_e^2 - 4\delta_e b_{e1} + b_{e1}^2) \sqrt{2e+1} \sqrt{2\sigma+1} \cdot \\
 & \quad \cdot \left\{ \begin{matrix} e & 2 & e \\ 2 & e & \sigma \end{matrix} \right\}) \quad (87)
 \end{aligned}$$

$$q_{e1} = (-)^e \sqrt{2e+1} C_{e1} \quad ; \quad q_{e\sigma} = (-)^e \sqrt{2e+1} C_{e\sigma}$$

Die auf der rechten Seite auftretenden Konstanten sind im Anhang in der Tabelle 2 zusammengefaßt.

1.7. Der Hamiltonoperator für Dipol- und Quadrupol- volumenschwingungen

Der Gesamthamiltonoperator hat folgende Gestalt:

$$H_{Ges} = H_{\alpha} + H_D + H_Q + H_{D\alpha} + H_{Q\alpha} \quad (88)$$

wobei H_{α} der Hamiltonoperator der Oberflächenschwingungen
 H_D der Hamiltonoperator der Dipolvolumenschwingungen
 H_Q der Hamiltonoperator der Quadrupolvolumenschwingungen
 $H_{D\alpha}$ der Wechselwirkungsoperator zwischen Dipolvolumen-
 und Quadrupoloberflächenschwingungen

$H_{Q\alpha}$ der Wechselwirkungsoperator zwischen Quadrupolvolumen- und Oberflächenschwingungen ist.

Die Hamiltonoperatoren werden mit Hilfe von zueinander konjugierten irreduziblen Tensoren konstruiert.

$$\begin{aligned} H_{\alpha} & \text{ mit Hilfe von } \alpha^{[2]} \text{ und } \pi^{[2]} \\ H_D & \text{ mit Hilfe von } q^{[1]} \text{ und } d^{[1]} \\ H_Q & \text{ mit Hilfe von } q^{[2]} \text{ und } d^{[2]} \end{aligned}$$

Für die Wechselwirkungsoperatoren ergeben sich Kopplungen zwischen den entsprechenden Tensoren von H_{α} und H_D bzw. H_Q .

Die Hamiltonoperatoren für Dipol- und Quadrupolsolumenschwingungen werden in harmonischer Näherung angesetzt:

$$H_D = -\sqrt{3} \left[\frac{1}{2B_1^D} [d^{[1]} \times d^{[1]}]^{[0]} + \frac{C_1^D}{2} [q^{[1]} \times q^{[1]}]^{[0]} \right] \quad (89)$$

und

$$H_Q = \sqrt{5} \left[\frac{1}{2B_2^Q} [d^{[2]} \times d^{[2]}]^{[0]} + \frac{C_2^Q}{2} [q^{[2]} \times q^{[2]}]^{[0]} \right] \quad (90)$$

1.8. Die Wechselwirkungsoperatoren $H_{D\alpha}$ und $H_{Q\alpha}$

Wie schon erwähnt, beschränken wir uns auf die Wechselwirkung des Oberflächenquadrupols mit GR-Dipol und GR-Quadrupol, da die höheren Multipolkopplungen viel weniger zur Energie beitragen. Die Wechselwirkung zwischen Dipol- und Quadrupolvolumenschwingungen wird vernachlässigt.

Der langsam schwingende Oberflächenquadrupol ($\hbar\omega \approx 1$ MeV) definiert eine zeitlich veränderliche Kernoberfläche und damit eine zeitlich veränderliche Randbedingung für die im Innern des Kerns schnell oszillierenden Riesenresonanzen.

Die Adiabasieannahme im Sinne von Born-Oppenheimer ist gerechtfertigt, da auf Grund des Frequenzverhältnisses (Für den energetisch tiefsten Mode (Dipol) beträgt $\frac{\omega_D}{\omega_Q} \approx \frac{1}{40} \dots \frac{1}{20}$) die schnellen Volumensoszillationen eine deformierte Kernoberfläche als Begrenzung 'sehen'.

Im folgenden wird aus den fundamentalen Variablen der irreduziblen Tensoren $\alpha^{[2]}$, $\pi^{[2]}$, $q^{[1]}$, $d^{[1]}$, $q^{[2]}$ und $d^{[2]}$ die allgemeine Hamiltonfunktion bis zu Gliedern zweiter Ordnung konstruiert.

Kopplungsterme von $\pi^{[2]}$ mit den Riesenresonanzamplituden treten wegen der Adiabasiannahme nicht auf (Bei exakter Adiabasie sind sie Null.). Die Wechselwirkungsoperatoren lauten im einzelnen:

a) Für die Dipolwechselwirkung:

$$\begin{aligned}
 H_{D\alpha} = \hbar \omega_1 \Big\{ & A_1 \left[q^{[1]} \times q^{[1]} \right]^{[2]} \times \alpha^{[2]} \Big]^{[0]} \\
 & + a_1 \left[[d^{[1]} \times d^{[1]}]^{[2]} \times \alpha^{[2]} \right]^{[0]} \\
 & + \sum_{G=0,2} (A_{1G} \left[[q^{[1]} \times q^{[1]}]^{[G]} \times [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[6]} \right]^{[0]} \\
 & \quad + a_{1G} \left[[d^{[1]} \times d^{[1]}]^{[6]} \times [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[6]} \right]^{[0]}) \\
 & + \sum_{G=0,2} (B_{1G} \left[[q^{[1]} \times q^{[1]}]^{[G]} \times [\pi^{[2]} \times \pi^{[2]}]^{[6]} \right]^{[0]} \\
 & \quad + b_{1G} \left[[d^{[1]} \times d^{[1]}]^{[6]} \times [\pi^{[2]} \times \pi^{[2]}]^{[6]} \right]^{[0]}) \Big\} \quad (91)
 \end{aligned}$$

Hier sind die Terme mit $\pi^{[2]}$ noch enthalten, um wenigstens einmal den vollständigen Operator hingeschrieben zu haben. Auf die Konstanten wird später noch ausführlich eingegangen.

b) Für die Quadrupolwechselwirkung:

$$\begin{aligned}
 H_{Q\alpha} = \hbar \omega_2 \Big\{ & C_1 \left[q^{[2]} \times \alpha^{[2]} \right]^{[0]} + C_2 \left[[q^{[2]} \times q^{[2]}]^{[2]} \times \alpha^{[2]} \right]^{[0]} \\
 & + C_3 \left[[d^{[2]} \times d^{[2]}]^{[2]} \times \alpha^{[2]} \right]^{[0]} \\
 & + \sum_{G=0,2,4} (C_{1G} \left[[q^{[2]} \times q^{[2]}]^{[G]} \times [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[6]} \right]^{[0]} \\
 & \quad + C_{2G} \left[[d^{[2]} \times d^{[2]}]^{[6]} \times [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[6]} \right]^{[0]}) \\
 & + \sum_{G=0,2,4} (C_{3G} \left[[q^{[2]} \times q^{[2]}]^{[G]} \times [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[6]} \right]^{[0]}) \Big\} \quad (92)
 \end{aligned}$$

1.9. Die Quantisierung der Hamiltonoperatoren

In der zweiten Quantisierung werden die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren durch folgende Transformation eingeführt:

$$\alpha_{2\mu} \rightarrow \hat{\alpha}_{2\mu} = \sqrt{\frac{\hbar \omega_2}{2C_2}} \left[\beta^{+[2]} + (-)^{\mu} \beta_{-\mu}^{[2]} \right] \quad (93)$$

$$\pi_{2\mu} \rightarrow \hat{\pi}_{2\mu} = -i \sqrt{\frac{\hbar C_2}{2\omega_2}} \left[(-)^{\mu} \beta_{-\mu}^{+[2]} - \beta_{\mu}^{[2]} \right]$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{C_2}{B_2}}$$

$$q_{1\mu} \rightarrow \hat{q}_{1\mu} = \sqrt{\frac{\hbar \omega_1}{2C_1}} \left[\delta_{\mu}^{+[1]} + (-)^{\mu} \delta_{-\mu}^{[1]} \right] \quad (94)$$

$$d_{1\mu} \rightarrow \hat{d}_{1\mu} = -i \sqrt{\frac{\hbar C_1}{2\omega_1}} \left[(-)^{\mu} \delta_{-\mu}^{+[1]} - \delta_{\mu}^{[1]} \right]$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{C_1}{B_1}}$$

$$q_{2\mu} \rightarrow \hat{q}_{2\mu} = \sqrt{\frac{\hbar \omega_3}{2C_3}} \left[\gamma_{\mu}^{+[2]} + (-)^{\mu} \gamma_{-\mu}^{[2]} \right] \quad (95)$$

$$d_{2\mu} \rightarrow \hat{d}_{2\mu} = -i \sqrt{\frac{\hbar C_3}{2\omega_3}} \left[(-)^{\mu} \gamma_{-\mu}^{+[2]} - \gamma_{\mu}^{[2]} \right]$$

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{C_3}{B_3}}$$

Die oben eingeführten Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren genügen den Bosonenvertauschungsrelationen:

$$[\beta_{\mu}, \beta_{\mu'}] = [\beta_{\mu}^{+}, \beta_{\mu'}^{+}] = 0 \quad (96)$$

$$[\beta_{\mu}, \beta_{\mu'}^{+}] = \delta_{\mu\mu'}$$

In der zweiten Quantisierung lauten die Hamiltonoperatoren für Dipol- und Quadrupolvolumenschwingungen:

$$H_D = -E_1 \left(\sqrt{3} [\delta^{+[1]} \times \delta^{[1]}]^{[0]} + \frac{3}{2} \right) \quad (97)$$

$$H_Q = E_3 \left(\sqrt{5} \left[\gamma^{+[2]} \times \gamma^{[2]} \right]^{[0]} + \frac{5}{2} \right) \quad (98)$$

Die Wechselwirkungsoperatoren lauten in der zweiten Quantisierung:

$$\begin{aligned} H_{D\alpha} = & \frac{1}{4} E_1 (a_{11} - p_{11}) \left\{ \left[\left[\delta^{+[1]} \times \delta^{+[1]} \right]^{[2]} \times \alpha^{[2]} \right]^{[0]} + \left[\left[\delta^{[1]} \times \delta^{[1]} \right]^{[2]} \times \alpha^{[2]} \right]^{[0]} \right\} \\ & + \frac{1}{2} E_1 (a_{11} + p_{11}) \left[\left[\delta^{+[1]} \times \delta^{[1]} \right]^{[2]} \times \alpha^{[2]} \right]^{[0]} \\ & + \frac{1}{4} E_1 \sum_{\sigma=0,2} (a_{1\sigma} - p_{1\sigma}) \left\{ \left[\left[\delta^{+[1]} \times \delta^{[1]} \right]^{[6]} \times \left[\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]} \right]^{[6]} \right]^{[0]} \right. \\ & \quad \left. + \left[\left[\delta^{[1]} \times \delta^{[1]} \right]^{[6]} \times \left[\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]} \right]^{[6]} \right]^{[0]} \right\} \quad (99) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \frac{1}{2} E_1 \sum_{\sigma=0,2} (a_{1\sigma} + p_{1\sigma}) \left[\left[\delta^{+[1]} \times \delta^{[1]} \right]^{[6]} \times \left[\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]} \right]^{[6]} \right]^{[0]} \\ & + \frac{1}{4} E_1 \sum_{\sigma=0,2} (a_{1\sigma} - p_{1\sigma}) \left\{ \left[\left[\delta^{+[1]} \times \delta^{+[1]} \right]^{[6]} \times \left[\pi^{[2]} \times \pi^{[2]} \right]^{[6]} \right]^{[0]} \right. \\ & \quad \left. + \left[\left[\delta^{[1]} \times \delta^{[1]} \right]^{[6]} \times \left[\pi^{[2]} \times \pi^{[2]} \right]^{[6]} \right]^{[0]} \right\} \\ & + \frac{1}{2} E_1 \sum_{\sigma=0,2} (a_{1\sigma} + p_{1\sigma}) \left[\left[\delta^{+[1]} \times \delta^{[1]} \right]^{[6]} \times \left[\pi^{[2]} \times \pi^{[2]} \right]^{[6]} \right]^{[0]} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} H_{Q\alpha} = & \sqrt{\frac{\hbar \omega_3}{2 C_3}} \left\{ \left[\gamma^{+[2]} \times \alpha^{[2]} \right]^{[0]} + \left[\gamma^{[2]} \times \alpha^{[2]} \right]^{[0]} + \left[\gamma^{+[2]} \times \pi^{[2]} \right]^{[0]} + \left[\gamma^{[2]} \times \pi^{[2]} \right]^{[0]} \right\} \\ & + \frac{1}{4} E_3 (q_{21} - p_{21}) \left\{ \left[\left[\gamma^{+[2]} \times \gamma^{+[2]} \right]^{[2]} \times \alpha^{[2]} \right]^{[0]} \right. \\ & \quad \left. + \left[\left[\gamma^{[2]} \times \gamma^{[2]} \right]^{[2]} \times \alpha^{[2]} \right]^{[0]} \right\} \quad (100) \\ & + \frac{1}{2} E_3 (q_{21} + p_{21}) \left[\left[\gamma^{+[2]} \times \gamma^{[2]} \right]^{[2]} \times \alpha^{[2]} \right]^{[0]} \\ & + \frac{1}{4} E_3 \sum_{\sigma=0,2,4} (q_{2\sigma} - p_{2\sigma}) \left\{ \left[\left[\gamma^{+[2]} \times \gamma^{[2]} \right]^{[6]} \times \left[\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]} \right]^{[6]} \right]^{[0]} \right. \\ & \quad \left. + \left[\left[\gamma^{[2]} \times \gamma^{[2]} \right]^{[6]} \times \left[\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]} \right]^{[6]} \right]^{[0]} \right\} \\ & + \frac{1}{2} E_3 \sum_{\sigma=0,2,4} (q_{2\sigma} + p_{2\sigma}) \left[\left[\gamma^{+[2]} \times \gamma^{[2]} \right]^{[6]} \times \left[\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]} \right]^{[6]} \right]^{[0]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{4} E_3 \sum_{\sigma=0,2,4} (q_{2\sigma} - p_{2\sigma}) \left\{ \left[\left[y^{+[\sigma]} \times y^{+[\sigma]} \right]^{[\sigma]} \times \left[\pi^{[\sigma]} \times \pi^{[\sigma]} \right]^{[\sigma]} \right]^{[0]} \right. \\
 & \quad \left. + \left[\left[y^{[\sigma]} \times y^{[\sigma]} \right]^{[\sigma]} \times \left[\pi^{[\sigma]} \times \pi^{[\sigma]} \right]^{[\sigma]} \right]^{[0]} \right\} \\
 & + \frac{1}{2} E_3 \sum_{\sigma=0,2,4} (q_{2\sigma} + p_{2\sigma}) \left[\left[y^{+[\sigma]} \times y^{[\sigma]} \right]^{[\sigma]} \times \left[\pi^{[\sigma]} \times \pi^{[\sigma]} \right]^{[\sigma]} \right]^{[0]}
 \end{aligned}$$

1.10. Die Basishamiltonoperatoren

Da die Wechselwirkung zwischen Dipol- und Quadrupolriesenresonanzen vernachlässigt wurde, konnte die Diagonalisierung für die beiden Wechselwirkungsoperatoren der Volumen- mit den Oberflächenschwingungen getrennt in verschiedenen Basen vorgenommen werden.

Der Basishamiltonoperator für Dipolschwingungen lautet:

$$\begin{aligned}
 H_B^D = & B_2' [\dot{\alpha}^{[2]} \times \dot{\alpha}^{[2]}]^{[0]} + C_2' [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]} \\
 & + B_1' [\dot{q}^{[1]} \times \dot{q}^{[1]}]^{[0]} + C_1' [q^{[1]} \times q^{[1]}]^{[0]} \quad (101)
 \end{aligned}$$

Die Oberflächenquadrupol- und Dipolvolumenwellenfunktionen werden auf folgende Art zu Gesamtbasisfunktionen gekoppelt:

$$|N_1 \ell_1; N_2 \nu_2 \ell_2; JM\rangle = \sum_{m_1 m_2} (\ell_1 \ell_2 J | m_1 m_2 M) |N_1 \ell_1 m_1\rangle |N_2 \nu_2 \ell_2 m_2\rangle \quad (102)$$

Für die Quadrupolriesenresonanzen lautet der Basishamiltonian:

$$\begin{aligned}
 H_B^Q = & B_2' [\dot{\alpha}^{[2]} \times \dot{\alpha}^{[2]}]^{[0]} + C_2' [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]} \\
 & + B_3' [\dot{q}^{[2]} \times \dot{q}^{[2]}]^{[0]} + C_3' [q^{[2]} \times q^{[2]}]^{[0]} \quad (103)
 \end{aligned}$$

Mit der Gesamtbasisfunktion:

$$\begin{aligned}
 |N_3 \ell_3; N_2 \nu_2 \ell_2; JM\rangle = & \sum_{m_1 m_2} (\ell_3 \ell_2 J | m_3 m_2 M) \cdot \\
 & |N_3 \ell_3 m_3\rangle |N_2 \nu_2 \ell_2 m_2\rangle \quad (104)
 \end{aligned}$$

Die Quantenzahlen lauten:

N: Phononenquantenzahl $N = 0, 1, 2, 3, \dots$

ν : Seniorität, d.h. Anzahl der nicht paarweise zu Null gekoppelten Phononen $\nu = N, N-2, \dots, 1$

l: Drehimpulsquantenzahl

m: magnetische Quantenzahl

Wir beschränken uns auf Einphononenzustände, das heißt, für Dipolriesenresonanzen ist $N_1=1$ und $l=1$, was auf Grund der Auswahlregeln für $l_2=0$ oder $l_2=2$ bewirkt. Für Quadrupolriesenresonanzen ist $N_3=1$ und $l_3=2$, daraus folgt für $l_2=0, 2, 4$.

Da die Wechselwirkung zwischen Riesenresonanzen und Quadrupoloberflächenschwingungen größer ist als der Abstand der Vielphononenzustände des Niederenergiespektrums untereinander, kann zur Berechnung des Gesamthamiltonoperators keine Störungsrechnung durchgeführt werden, sondern man muß ihn diagonalisieren. Das Ergebnis der Diagonalisierung sind die Energieeigenwerte und die Wellenfunktionen des Kerns.

1.11 Die Kopplungskonstanten von $H_{D\alpha}$, $H_{Q\alpha}$ und ihre Renormierung

Die im Wechselwirkungsoperator vorkommenden Konstanten sind für alle Kerne einheitlich. Sie wurden zuerst von Urbas und Greiner¹² mit Hilfe der Variationsmethode näherungsweise berechnet.

Später haben Stock und Arenhövel¹¹ ein Verfahren entwickelt, das erlaubt, die Kopplungskonstanten wie vorne beschrieben, in beliebiger Ordnung exakt zu berechnen.

Im Verlauf der weiteren Rechnungen wird gezeigt, wie man die Konstanten berechnet und sie renormiert.

Der allgemeine Wechselwirkungsoperator lautet für einen beliebigen Riesenresonanzmultipol:

$$\begin{aligned}
 H_e = & (-)^l \frac{\hat{e}}{\hat{B}_e} [\pi^{[e]} \times \pi^{[e]}]^{[0]} + \frac{\rho_{e1}}{\hat{B}_e} \left[[\pi^{[e]} \times \pi^{[e]}]^{[2]} \times \alpha^{[2]} \right]^{[0]} \\
 & + \frac{1}{\hat{B}_e} \sum_{\sigma} \rho_{e\sigma} \left[[\pi^{[e]} \times \pi^{[e]}]^{[\sigma]} \times [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[\sigma]} \right]^{[0]} \\
 & + (-)^l \hat{e} \hat{C}_e [Q^{[e]} \times Q^{[e]}]^{[0]} + \hat{C}_e q_{e\sigma} \left[[Q^{[e]} \times Q^{[e]}]^{[2]} \times \alpha^{[2]} \right]^{[0]} \quad (105) \\
 & + \hat{C}_e \sum_{\sigma} q_{e\sigma} \left[[Q^{[e]} \times Q^{[e]}]^{[\sigma]} \times [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[\sigma]} \right]^{[0]}
 \end{aligned}$$

wobei

$$\hat{e} = \sqrt{2e+1} ; \hat{B}_e^{-1} = \frac{R_{red}^{(0)} R_e^2}{2 R_0^3 M B_e} ; \hat{C}_e = \frac{8 \pi R_0^3}{2 R_0} C_e \quad (106)$$

ist.

Um den Hamiltonoperator diagonal in den Multipolphononen zu machen, führt man eine kanonische Transformation ein. Das erreicht man, wenn $\tilde{p}_e = \tilde{q}_e$ wird.

$$\tilde{Q}^{[e]} = Q^{[e]} + a_{e1} [Q^{[e]} \times \alpha^{[2]}]^{[e]} + \sum_{\sigma} a_{e\sigma} [Q^{[e]} \times \alpha^{[\sigma]}_{(2)}]^{[e]} + \dots \quad (107)$$

wobei $\alpha^{[\sigma]}_{(2)} = [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[\sigma]}$ ist.

Die inverse Transformation lautet:

$$Q^{[e]} = \tilde{Q}^{[e]} + b_{e1} [\tilde{Q}^{[e]} \times \alpha^{[2]}]^{[e]} + \sum_{\sigma} b_{e\sigma} [\tilde{Q}^{[e]} \times \alpha^{[\sigma]}_{(2)}]^{[e]} + \dots \quad (108)$$

Setzt man Gl. 107 ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} Q^{[e]} &= Q^{[e]} + a_{e1} [Q^{[e]} \times \alpha^{[2]}]^{[e]} + b_{e1} [Q^{[e]} \times \alpha^{[2]}]^{[e]} \\ &+ \sum_{\sigma} a_{e\sigma} [Q^{[e]} \times \alpha^{[\sigma]}_{(2)}]^{[e]} + a_{e1} b_{e1} [[Q^{[e]} \times \alpha^{[2]}]^{[e]} \times \alpha^{[2]}]^{[e]} \\ &+ \sum_{\sigma} b_{e\sigma} [Q^{[e]} \times \alpha^{[\sigma]}_{(2)}]^{[e]} + \text{höhere Glieder} \end{aligned} \quad (109)$$

Sei

$$\begin{aligned} [[Q^{[e]} \times \alpha^{[2]}]^{[e]} \times \alpha^{[2]}]^{[\lambda]} &\equiv A^{[\lambda]} = \\ &= \sum_{\sigma} [Q^{[e]} \times \alpha^{[\sigma]}_{(2)}]^{[\lambda]} \langle \ell(22)\sigma; \lambda / (e2)e2; \lambda \rangle \\ &= (-)^{\ell+\lambda} \sum_{\sigma} \hat{\ell} \hat{\sigma} \begin{Bmatrix} 2 & 2 & \sigma \\ e & \lambda & e \end{Bmatrix} [Q^{[e]} \times \alpha^{[\sigma]}_{(2)}]^{[\lambda]} \end{aligned} \quad (110)$$

Damit die Gl. 110 für Q^1 eine Identität wird, müssen die einzelnen Glieder verschwinden, d.h.:

$$\begin{aligned} a_{e1} + b_{e1} &= 0 \\ a_{e\sigma} + b_{e\sigma} + \hat{\ell} \hat{\sigma} \begin{Bmatrix} 2 & 2 & \sigma \\ e & \lambda & e \end{Bmatrix} a_{e1} b_{e1} &= 0 \end{aligned} \quad (111)$$

Die Transformation der Impulse lautet:

$$\begin{aligned}\pi_m^{[e]} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_m^{[e]}} = \sum_{m'} \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_m^{[e]}} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_m^{[e]}} &= \sum_{m'} \pi_{m'}^{[e]} \frac{\partial \dot{Q}_{m'}^{[e]}}{\partial \dot{Q}_m^{[e]}} \\ \dot{Q}^{[e]} &= \tilde{Q}^{[e]} + b_{e1} [\tilde{Q}^{[e]} \times \alpha^{[2]}]^{[e]} + \sum_{\sigma} b_{e\sigma} [\tilde{Q}^{[e]} \times \alpha^{[\sigma]}(2)]^{[e]}\end{aligned}\quad (112)$$

$\dot{\alpha}^{[2]}$ wurde aus Adiabasiergründen vernachlässigt.

$$\begin{aligned}\dot{Q}_{m'}^{[e]} &= \tilde{Q}_{m'}^{[e]} + b_{e1} (-)^{l+m'} \sum_{m_1 m_2} \begin{pmatrix} l & 2 & l \\ m_1 & m_2 & -m' \end{pmatrix} \tilde{Q}_{m_1}^{[e]} \alpha_{m_2}^{[e]}(2) \\ &+ \sum_{\sigma} b_{e\sigma} (-)^{l+m'} \sum_{m_1 m_2} \hat{l} \begin{pmatrix} l & \sigma & l \\ m_1 & m_2 & -m' \end{pmatrix} \tilde{Q}_{m_1}^{[e]} \alpha_{m_2}^{[\sigma]}(2)\end{aligned}\quad (113)$$

$$\frac{\partial \dot{Q}_{m'}^{[e]}}{\partial \dot{Q}_m^{[e]}} = \delta_{mm'} + b_{e1} (-)^{l+m'} \sum_{m_2} \hat{l} \begin{pmatrix} l & 2 & l \\ m & m_2 & -m' \end{pmatrix} \alpha_{m_2}^{[2]}(2)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}_m^{[e]} &= \sum_{m'} \pi_{m'}^{[e]} \left(\delta_{mm'} + b_{e1} (-)^{l+m'} \sum_{m_2} \hat{l} \begin{pmatrix} l & 2 & l \\ m & m_2 & -m' \end{pmatrix} \alpha_{m_2}^{[2]}(2) \right) \\ &= \tilde{\pi}_m^{[e]} + b_{e1} (-)^{l+m'} \sum_{m' m_2} \hat{l} \begin{pmatrix} l & 2 & l \\ m & m_2 & -m' \end{pmatrix} \pi_{m'}^{[e]} \alpha_{m_2}^{[2]} + \dots \\ &= \tilde{\pi}_m^{[e]} + b_{e1} (-)^l \sum_{m_1 m_2} \hat{l} \begin{pmatrix} l & 2 & l \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix} (-)^{m_1} \pi_{-m_1}^{[e]} \alpha_{m_2}^{[2]} + \dots \\ &= \tilde{\pi}_m^{[e]} + (-)^m b_{e1} [\tilde{\pi}^{[e]} \times \alpha^{[2]}]_{-m}^{[e]} + (-)^m \sum_{\sigma} b_{e\sigma} [\tilde{\pi}^{[e]} \times \alpha^{[\sigma]}(2)]_{-m}^{[e]}\end{aligned}\quad (114)$$

Dieses Ergebnis, daß sich die $\tilde{\pi}_m^{[e]}$ umgekehrt wie die $Q_m^{[e]}$ transformieren ist nicht verwunderlich, da Koordinaten und Impulse sich kontragredient transformieren.

Somit ist:

$$\begin{aligned}\pi^{[e]} &= \tilde{\pi}^{[e]} + a_{e1} [\tilde{\pi}^{[e]} \times \alpha^{[2]}]^{[e]} + \\ &+ \sum_{\sigma} a_{e\sigma} [\tilde{\pi}^{[e]} \times \alpha^{[\sigma]}(2)]^{[e]} + \dots\end{aligned}\quad (115)$$

Im Hamiltonoperator werden nun die entsprechenden Größen durch die transformierten ersetzt und man erhält:

$$\begin{aligned} \pi^{[0]}(2) &= \tilde{\pi}^{[0]}(2) + 2a_{e1} \left[\tilde{\pi}^{[e]} \times \left[\tilde{\pi}^{[e]} \times \alpha^{[2]} \right]^{[e]} \right]^{[0]} \\ &+ 2 \sum_{\sigma} a_{e\sigma} \left[\tilde{\pi}^{[e]} \times \left[\tilde{\pi}^{[e]} \times \alpha^{[\sigma]}(2) \right]^{[e]} \right]^{[0]} \\ &+ a_{e1}^2 \left[\left[\tilde{\pi}^{[e]} \times \alpha^{[2]} \right]^{[e]} \times \left[\tilde{\pi}^{[e]} \times \alpha^{[2]} \right]^{[e]} \right]^{[0]} + \dots \end{aligned} \quad (116)$$

$$\begin{aligned} &\left[\tilde{\pi}^{[e]} \times \left[\tilde{\pi}^{[e]} \times \alpha^{[\sigma]} \right]^{[e]} \right]^{[0]} = \\ &= \sum \left[\tilde{\pi}^{[2]}(2) \times \alpha^{[\sigma]}(2) \right]^{[0]} \langle (ee)\lambda\sigma; 0 / e(e\sigma)e, 0 \rangle = \\ &= \hat{\lambda} \left[\tilde{\pi}^{[\sigma]}(2) \times \alpha^{[\sigma]}(2) \right]^{[0]} \end{aligned} \quad (117)$$

$$\begin{aligned} &\left[\left[\tilde{\pi}^{[e]} \times \alpha^{[2]} \right]^{[e]} \times \left[\tilde{\pi}^{[e]} \times \alpha^{[2]} \right]^{[e]} \right]^{[0]} = \sum_{\sigma} \left[\tilde{\pi}^{[\sigma]}(2) \times \alpha^{[\sigma]}(2) \right]^{[0]} \\ &\cdot \langle (ee)\sigma(22)\sigma; 0 / (e2)e(e2)e; 0 \rangle = \sum_{\sigma} \hat{\sigma} \hat{e} \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 & \sigma \\ e & e & e \end{matrix} \right\} \left[\tilde{\pi}^{[\sigma]}(2) \times \alpha^{[\sigma]}(2) \right]^{[0]} \end{aligned} \quad (118)$$

Analog ergibt sich:

$$\begin{aligned} &\left[\pi^{[2]}(2) \times \alpha^{[2]} \right]^{[0]} = \left[\tilde{\pi}^{[2]}(2) \times \alpha^{[2]} \right]^{[0]} + 2a_{e1} \left[\tilde{\pi}^{[e]} \times \left[\tilde{\pi}^{[e]} \times \alpha^{[2]} \right]^{[e]} \times \alpha^{[2]} \right]^{[0]} + \dots \\ &= \left[\tilde{\pi}^{[2]}(2) \times \alpha^{[2]} \right]^{[0]} + 2a_{e1} \sum_{\sigma} \hat{\sigma} \hat{e} \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 & \sigma \\ e & e & e \end{matrix} \right\} \left[\tilde{\pi}^{[\sigma]}(2) \times \alpha^{[\sigma]}(2) \right]^{[0]} + \dots \end{aligned} \quad (119)$$

$$\left[\pi^{[\sigma]}(2) \times \alpha^{[\sigma]}(2) \right]^{[0]} = \left[\tilde{\pi}^{[\sigma]}(2) \times \alpha^{[\sigma]}(2) \right]^{[0]} \quad (120)$$

Für die Ausdrücke der $Q^{[a]}(2)$ gilt entsprechendes.

Für H_1 ergibt sich:

$$\begin{aligned} H_e &= (-)^e \frac{\hat{e}}{\hat{B}_e} \tilde{\pi}^{[0]}(2) + \frac{1}{\hat{B}_e} \left((-)^e \hat{e} 2a_{e1} + p_{e1} \right) \left[\tilde{\pi}^{[2]}(2) \times \alpha^{[2]} \right]^{[0]} \\ &+ \frac{1}{\hat{B}_e} \sum_{\sigma} \left((-)^e \hat{e} (2a_{e\sigma} + a_{e1}^2 \hat{\sigma} \hat{e} \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 & \sigma \\ e & e & e \end{matrix} \right\} \right. \right. \\ &\left. \left. + 2a_{e1} p_{e1} \hat{\sigma} \hat{e} \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 & \sigma \\ e & e & e \end{matrix} \right\} + p_{e\sigma} \right) \left[\tilde{\pi}^{[\sigma]}(2) \times \alpha^{[\sigma]}(2) \right]^{[0]} \right. \\ &+ \text{die entsprechenden Terme mit } Q^{[b]} \text{ (a durch b ersetzen) } = \end{aligned} \quad (121)$$

$$= (-)^e \frac{\hat{e}}{\hat{B}_e} \tilde{\pi}^{[0]}(z) + \frac{\tilde{p}_{e1}}{\hat{B}_e} \left[\tilde{\pi}^{[2]}(z) \times \alpha^{[2]} \right]^{[0]} + \\ + \frac{1}{\hat{B}_e} \sum_{\sigma} \tilde{p}_{e\sigma} \left[\tilde{\pi}^{[\sigma]}(z) \times \alpha^{[\sigma]}(z) \right]^{[0]} + \dots$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{e1} &= (-)^e \hat{e} 2a_{e1} + p_{e1} \\ \tilde{q}_{e1} &= (-)^e \hat{e} 2b_{e1} + q_{e1} \\ \tilde{p}_{e\sigma} &= (-)^e \hat{e} 2a_{e\sigma} + p_{e\sigma} + a_{e1} \left((-)^e \hat{e} a_{e1} + 2p_{e1} \right) \hat{\sigma} \hat{e} \left\{ \begin{smallmatrix} 2 & 2 & \sigma \\ e & e & e \end{smallmatrix} \right\} \\ \tilde{q}_{e\sigma} &= (-)^e \hat{e} 2b_{e1} + q_{e\sigma} + b_{e1} \left((-)^e \hat{e} b_{e1} + 2q_{e1} \right) \hat{\sigma} \hat{e} \left\{ \begin{smallmatrix} 2 & 2 & \sigma \\ e & e & e \end{smallmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (122)$$

Es gilt:

$$\tilde{p}_{e1} + \tilde{q}_{e1} = p_{e1} + q_{e1} \quad (123)$$

Ferner soll gelten:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{e1} - \tilde{q}_{e1} &= (-)^e \hat{e} 2(a_{e1} - b_{e1}) + p_{e1} - q_{e1} = 0 \\ \Rightarrow a_{e1} - b_{e1} &= \frac{(-)^e}{2\hat{e}} (q_{e1} - p_{e1}) \\ b_{e1} &= \frac{(-)^e}{4\hat{e}} (p_{e1} - q_{e1}) \end{aligned} \quad (124)$$

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{e\sigma} - \tilde{q}_{e\sigma} &= (-)^e \hat{e} 2(a_{e\sigma} - b_{e\sigma}) + p_{e\sigma} - q_{e\sigma} + \left((-)^e \hat{e} (a_{e1}^2 - b_{e1}^2) + \right. \\ &\quad \left. + 2(a_{e1}p_{e1} - b_{e1}q_{e1}) \right) \hat{\sigma} \hat{e} \left\{ \begin{smallmatrix} 2 & 2 & \sigma \\ e & e & e \end{smallmatrix} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (125)$$

$$\begin{aligned} a_{e\sigma} - b_{e\sigma} &= \frac{(-)^e}{2\hat{e}} \left(q_{e\sigma} - p_{e\sigma} + 2b_{e1} (p_{e1} + q_{e1}) \hat{\sigma} \hat{e} \left\{ \begin{smallmatrix} 2 & 2 & \sigma \\ e & e & e \end{smallmatrix} \right\} \right) \\ &= \frac{(-)^e}{2\hat{e}} \left(q_{e\sigma} - p_{e\sigma} + 2 \frac{(-)^e}{4\hat{e}} (p_{e1} - q_{e1}) (p_{e1} + q_{e1}) \hat{\sigma} \hat{e} \left\{ \begin{smallmatrix} 2 & 2 & \sigma \\ e & e & e \end{smallmatrix} \right\} \right) \\ &= A^{\sigma} \end{aligned} \quad (126)$$

Ferner gilt:

$$a_{e\sigma} + b_{e\sigma} = b_{e1}^2 \hat{e} \hat{\sigma} \left\{ \begin{smallmatrix} 2 & 2 & \sigma \\ e & e & e \end{smallmatrix} \right\} = \frac{\hat{\sigma}}{\hat{e}} \left\{ \begin{smallmatrix} 2 & 2 & \sigma \\ e & e & e \end{smallmatrix} \right\} + \frac{1}{16} (p_{e1} - q_{e1})^2$$

$$= B^{\sigma} \quad (127)$$

$$\Rightarrow a_{e\sigma} = \frac{1}{2} (A^{\sigma} + B^{\sigma})$$

$$b_{e\sigma} = \frac{1}{2} (B^{\sigma} - A^{\sigma})$$

Vor den Kopplungskonstanten der quadratischen Terme im Hamiltonoperator steht die Summe $\tilde{p}_{e\sigma} + \tilde{q}_{e\sigma}$, die nun untersucht werden soll.

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{e\sigma} + \tilde{q}_{e\sigma} &= (-)^e \hat{e} 2 (a_{e\sigma} + b_{e\sigma}) + p_{e\sigma} + q_{e\sigma} \\ &\quad + \left((-)^e \hat{e} (a_{e1}^2 + b_{e1}^2) + 2(a_{e1} p_{e1} + b_{e1} q_{e1}) \right) \hat{\sigma} \hat{e} \left\{ \begin{smallmatrix} 2 & 2 & \sigma \\ e & e & e \end{smallmatrix} \right\} \\ &= (-)^e \hat{e} 2 B^{\sigma} + \left((-)^e \hat{e} 2 b_{e1}^2 + 2 b_{e1} (q_{e1} - p_{e1}) \right) \hat{\sigma} \hat{e} \left\{ \begin{smallmatrix} 2 & 2 & \sigma \\ e & e & e \end{smallmatrix} \right\} + p_{e\sigma} + q_{e\sigma} \quad (128) \\ &= (-)^e \hat{e} 2 B^{\sigma} - (-)^e \frac{3}{8} (p_{e1} - q_{e1})^2 \hat{\sigma} \left\{ \begin{smallmatrix} 2 & 2 & \sigma \\ e & e & e \end{smallmatrix} \right\} + p_{e\sigma} + q_{e\sigma} \\ &= (-)^e \frac{1}{8} (p_{e1} - q_{e1})^2 \hat{\sigma} \left\{ \begin{smallmatrix} 2 & 2 & \sigma \\ e & e & e \end{smallmatrix} \right\} - (-)^e \frac{3}{8} (p_{e1} - q_{e1}) \hat{\sigma} \left\{ \begin{smallmatrix} 2 & 2 & \sigma \\ e & e & e \end{smallmatrix} \right\} + \\ &\quad + p_{e\sigma} + q_{e\sigma} \\ &= -(-)^e \frac{1}{4} (p_{e1} - q_{e1})^2 \hat{\sigma} \left\{ \begin{smallmatrix} 2 & 2 & \sigma \\ e & e & e \end{smallmatrix} \right\} + p_{e\sigma} + q_{e\sigma} \end{aligned}$$

Der Hamiltonoperator lautet in der transformierten Form in der zweiten Quantisierung:

$$\begin{aligned} H_{\ell} &= (-)^{\ell} \hat{\ell} \hbar \omega_{\ell} \left\{ [q^{+[\ell]} \times q^{[\ell]}]^{[0]} + \frac{1}{2} (-)^{\ell} \sqrt{2\ell+1} \right\} \\ &\quad + \hbar \omega_{\ell} \tilde{B}_{e1} [[q^{+[\ell]} \times q^{[\ell]}]^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]} \\ &\quad + \hbar \omega_{\ell} \sum_{\sigma} \tilde{B}_{e\sigma} \left\{ [[q^{+[\ell]} \times q^{[\ell]}]^{[\sigma]} \times [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[\sigma]}]^{[0]} \right\} \quad (130) \\ &\quad + \frac{1}{2} \delta_{\sigma 0} (-)^{\ell} \hat{\ell} [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]} \end{aligned}$$

Mit den Konstanten:

$$\begin{aligned}\tilde{B}_{e1} &= B_{e1} \quad ; \quad B_{e1} = \frac{1}{2} (q_{e1} + p_{e1}) \\ \tilde{B}_{e\sigma} &= B_{e\sigma} - (-)^{\ell} 2 \tilde{\sigma} \left\{ \begin{smallmatrix} 2 & 2 & \sigma \\ \ell & \ell & \ell \end{smallmatrix} \right\} A_{e1}^2 \\ B_{e\sigma} &= \frac{1}{2} (q_{e\sigma} + p_{e\sigma})\end{aligned}\tag{131}$$

$$\begin{aligned}A_{e1} &= \frac{1}{4} (q_{e1} - p_{e1}) \\ A_{e\sigma} &= \frac{1}{4} (q_{e\sigma} - p_{e\sigma})\end{aligned}$$

Die Konstanten der linearen Terme haben sich nicht geändert.

$$\begin{aligned}b_{e1} &= - \frac{(-)^{\ell}}{\hat{\ell}} A_{e1} \\ B^{\sigma} &= \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\ell}} \left\{ \begin{smallmatrix} 2 & 2 & \sigma \\ 1 & 1 & \ell \end{smallmatrix} \right\} A_{e1}^2 \\ A^{\sigma} &= \frac{(-)^{\ell}}{2\hat{\ell}} (4A_{e\sigma} - 2(-)^{\ell} A_{e1} 2 B_{e1} \hat{\sigma} \left\{ \begin{smallmatrix} 2 & 2 & \sigma \\ \ell & \ell & \ell \end{smallmatrix} \right\} \\ &= \frac{(-)^{\ell}}{\hat{\ell}} (2A_{e\sigma} - 2(-)^{\ell} A_{e1} B_{e1} \hat{\sigma} \left\{ \begin{smallmatrix} 2 & 2 & \sigma \\ \ell & \ell & \ell \end{smallmatrix} \right\})\end{aligned}\tag{132}$$

$$\begin{aligned}b_{e\sigma} &= \frac{1}{2} (B^{\sigma} - A^{\sigma}) \\ &= \frac{1}{2\hat{\ell}} \left(\hat{\sigma} \left\{ \begin{smallmatrix} 2 & 2 & \sigma \\ \ell & \ell & \ell \end{smallmatrix} \right\} A_{e1}^2 - (-)^{\ell} 2 A_{e\sigma} + \right. \\ &\quad \left. + 2 A_{e1} B_{e1} \hat{\sigma} \left\{ \begin{smallmatrix} 2 & 2 & \sigma \\ \ell & \ell & \ell \end{smallmatrix} \right\} \right) \\ &= \frac{1}{2\hat{\ell}} \left(\hat{\sigma} \left\{ \begin{smallmatrix} 2 & 2 & \sigma \\ \ell & \ell & \ell \end{smallmatrix} \right\} (A_{e1} + 2 B_{e1}) A_{e1} - \right. \\ &\quad \left. - (-)^{\ell} 2 A_{e\sigma} \right)\end{aligned}$$

Die numerische Auswertung für $l=1$ lautet :

$$\begin{aligned} A_{11} &= 1.50879 & B_{11} &= -1.57954 \\ A_{10} &= 0.98808 & B_{10} &= -1.40236 \\ A_{12} &= 0.95029 & B_{12} &= -1.77529 \end{aligned} \quad (133)$$

Daraus ergibt sich für die weiteren Konstanten:

$$b_{11} = \frac{1}{\sqrt{3}} A_{11} = 0.87110 \quad (134)$$

$$\begin{aligned} A^{\sigma} &= -\frac{1}{2\sqrt{3}} (4A_{10} + 2A_{11} B_{11} \hat{\sigma} \left\{ \begin{smallmatrix} 2 & 2 & \sigma \\ 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix} \right\}) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}} (2A_{10} + A_{11} B_{11} \hat{\sigma} \left\{ \begin{smallmatrix} 2 & 2 & \sigma \\ 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix} \right\}) \end{aligned} \quad (135)$$

$$A^0 = -\frac{1}{\sqrt{3}} (2A_{10} + A_{11} B_{11} \frac{1}{\sqrt{15}}) \quad (136)$$

$$\begin{aligned} A^2 &= -\frac{1}{\sqrt{3}} (2A_{12} + A_{11} B_{11} \frac{\sqrt{15} \sqrt{7}}{\sqrt{2^2 \cdot 3 \cdot 5^2}}) = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}} (2A_{12} + A_{11} B_{11} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{7}{15}}) \end{aligned} \quad (137)$$

$$B^{\sigma} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{3}} \left\{ \begin{smallmatrix} 2 & 2 & \sigma \\ 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix} \right\} A_{11}^2 \quad (138)$$

$$B^0 = \frac{1}{3\sqrt{5}} A_{11}^2 = 0.33935 \quad (139)$$

$$B^2 = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{7}{5}} A_{11}^2 = 0.44892 \quad (140)$$

$$\tilde{B}_{10} = B_{10} + 2\hat{\sigma} A_{11}^2 \left\{ \begin{smallmatrix} 2 & 2 & \sigma \\ 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix} \right\} \quad (141)$$

$$\tilde{B}_{10} = B_{10} + \frac{2}{\sqrt{15}} A_{11}^2 = -0.22681 \quad (142)$$

$$\tilde{B}_{12} = B_{12} + \sqrt{\frac{7}{15}} A_{11}^2 = -0.22018 \quad (143)$$

Die numerische Auswertung für $l=2$ lautet:

$$\begin{aligned} A_{21} &= -1.43758 & B_{21} &= 1.19145 \\ A_{20} &= 0.86763 & B_{20} &= 0.66861 \\ A_{22} &= 3.93407 & B_{22} &= -1.44943 \\ A_{24} &= 3.90111 & B_{24} &= -0.01881 \end{aligned} \quad (144)$$

$$b_{21} = -\frac{1}{\sqrt{5}} A_{21} = 0.64291 \quad (145)$$

$$\begin{aligned} A^{\hat{0}} &= \frac{1}{2\sqrt{5}} (4A_{20} - 2A_{21}^2 B_{21} \hat{\sigma} \begin{Bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{Bmatrix}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} (2A_{20} - 2A_{21} B_{21} \hat{\sigma} \begin{Bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{Bmatrix}) \end{aligned} \quad (146)$$

$$A^0 = \frac{1}{\sqrt{5}} (2A_{20} + \frac{2}{3} A_{21} B_{21}) = 0.46964 \quad (147)$$

$$A^2 = \frac{1}{\sqrt{5}} (2A_{22} + 2A_{21} B_{21} \sqrt{\frac{3}{70}}) = 3.37193 \quad (148)$$

$$A^4 = \frac{1}{\sqrt{5}} (2A_{24} - 2A_{21} B_{21} \cdot 3 \cdot \frac{2}{35}) = 3.226634 \quad (149)$$

$$\begin{Bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{Bmatrix} = \frac{2}{35} ; \quad \begin{Bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{Bmatrix} = -\frac{3}{70} ; \quad \begin{Bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{5}$$

$$b_{26} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \left(\hat{G} \left\{ \begin{smallmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{smallmatrix} \right\} A_{21}^2 - 2A_{20} + 2A_{21} B_{21} \hat{G} \right. \\ \left. \cdot \left\{ \begin{smallmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{smallmatrix} \right\} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \left(\hat{G} \left\{ \begin{smallmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{smallmatrix} \right\} A_{21} (A_{21} + 2B_{21}) - 2A_{20} \right) \right) \quad (150)$$

$$B^0 = \frac{\hat{G}}{\sqrt{5}} \left\{ \begin{smallmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{smallmatrix} \right\} A_{21}^2 \quad (151)$$

$$B^0 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{5} A_{21}^2 = 0.184846 \quad (152)$$

$$B^2 = -\frac{3}{70} \cdot A_{21}^2 = 0.08857 \quad (153)$$

$$B^4 = \frac{3}{\sqrt{5}} A_{21}^2 \cdot \frac{2}{35} = 0.158439 \quad (154)$$

$$\tilde{B}_{20} = B_{20} - 2A_{21}^2 \hat{G} \left\{ \begin{smallmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{smallmatrix} \right\} \quad (155)$$

$$\tilde{B}_{20} = B_{20} - 2A_{21}^2 \cdot \frac{1}{5} = -0.1580 \quad (156)$$

$$\tilde{B}_{22} = B_{22} + 2A_{21}^2 \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{3}{70} = -1.0533 \quad (157)$$

$$\tilde{B}_{24} = B_{24} - 2A_{21}^2 \cdot 3 \cdot \frac{2}{35} = B_{24} - A_{21}^2 \cdot \frac{12}{35} = -0.72737 \quad (158)$$

Somit erhält man für die Hamiltonoperatoren H_{DGR} und H_{QGR} , was bedeutet, daß hier sowohl der harmonische Ansatz des entsprechenden Operators als auch der Wechselwirkungsoperator vereinigt sind, in der Form der zweiten Quantisierung folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
 H_{DGR} = & -\sqrt{3} \hbar \omega_1 \left\{ [q^{+[1]} \times q^{[1]}]^{[0]} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right\} \\
 & - 1.58 \hbar \omega_1 [[q^{+[1]} \times q^{[1]}]^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]} \\
 & - 0.227 \hbar \omega_1 [[q^{+[1]} \times q^{[1]}]^{[0]} \times [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]}]^{[0]} \\
 & - 0.220 \hbar \omega_1 [[q^{+[1]} \times q^{[1]}]^{[2]} \times [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[2]}]^{[0]} \\
 & + 0.227 \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar \omega_1 [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]}
 \end{aligned} \quad (159)$$

$$\begin{aligned}
 H_{QGR} = & \sqrt{5} \hbar \omega_2 \left\{ [q^{+[2]} \times q^{[2]}]^{[0]} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right\} \\
 & + 1.191 \hbar \omega_2 [[q^{+[2]} \times q^{[2]}]^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]} \\
 & - 0.158 \hbar \omega_2 [[q^{+[2]} \times q^{[2]}]^{[0]} \times [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]}]^{[0]} \\
 & - 1.053 [[q^{+[2]} \times q^{[2]}]^{[2]} \times [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[2]}]^{[0]} \cdot \hbar \omega_2 \\
 & - 0.727 [[q^{+[2]} \times q^{[2]}]^{[4]} \times [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[4]}]^{[0]} \cdot \hbar \omega_2 \\
 & - 0.158 \hbar \omega_2 \frac{\sqrt{5}}{2} [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]}
 \end{aligned} \quad (160)$$

mit

$$\begin{aligned}
 \hbar \omega_1 &= 78 A^{-1/3} & \lambda &= 1 & \text{1. Dipol -} \\
 \hbar \omega_2 &= 126 A^{-1/3} & \lambda &= 2 & \text{1. Quadrupol -} \\
 \hbar \omega_0 &= 169 A^{-1/3} & \lambda &= 0 & \text{1. Monopol schwingung}
 \end{aligned} \quad (161)$$

2. Multipoloperatoren

In diesem Kapitel wird der Dipol- und der Quadrupoloperator vorgestellt. Der erste Teil befaßt sich mit der allgemeinen Darstellung von Multipoloperatoren. Im zweiten Teil werden die Konstanten berechnet und renormiert. Der letzte Teil befaßt sich mit der expliziten Darstellung von Dipol- und Quadrupoloperator.

2.1. Allgemeine Darstellung

Die Multipolkomponenten eines elektrischen 2^l -Pols werden durch

$$D^{[l]} = e \int_V \rho_p r^l Y^{[l]} d\tau \quad (162)$$

definiert.

Da $\rho_p = \rho_p^0 + \eta$ ist, zerfällt dieser Ausdruck in zwei unabhängige Teile.

Der Anteil

$$M_{Sm} = e \rho_p^0 \int r^l Y_m^{[l]} d^3x \quad (163)$$

kommt von der Abweichung der Kerngestalt von der kugelsymmetrischen Form. Er läßt sich auch schreiben als:

$$\begin{aligned} M_{Sm} = & \frac{1}{3} \sqrt{4\pi} e \rho_p^0 R_o^3 \delta_{l0} + e \rho_p^0 R_o^5 \alpha_m^{[l]} \delta_{m2} + \\ & + e \rho_p^0 R_o^{l+3} \left\{ -\sqrt{\frac{5}{4\pi}} \delta_{l0} + \frac{l+2}{2} \frac{5}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} l & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \cdot \\ & \cdot \left[\alpha^{[l]} \times \alpha^{[2]} \right]_m^{[l]} \end{aligned} \quad (164)$$

Der erste Term in der letzten Zeile beschreibt die Volumenkonstanz. Der zweite Anteil in der Multipoldarstellung rührt hauptsächlich von der Dichteschwankung her und tritt für alle Multipole auf. Für ihn gilt:

$$\begin{aligned} M_{GAm} &= e \int \eta r^l Y_m^{[l]} d^3x \\ &= e \sum_{l'} \eta_{l'} r^l Y_m^{[l]} d^3x \end{aligned} \quad (165)$$

Bis zu Termen in zweiter Ordnung in $\alpha^{[2]}$ lautet die Radialintegration:

$$\begin{aligned} \int_0^{R_0} \eta_{e'} r^{e+2} dr &= \int_0^{R_0} \eta_{e'} r^{e+2} dr + \eta_{e'} (R_0) R_0^{e+3} \left\{ \left[\alpha^{[0]} \times \gamma^{[0]} \right]_0^{[0]} + \right. \\ &+ \sqrt{5} \left[\alpha^{[2]} \times \gamma^{[2]} \right]_0^{[0]} \left. \right\} + \frac{R_0^2}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\eta_{e'} r^{e+2} \right) \Big|_{R_0} \cdot \\ &\cdot 5 \left[\left[\alpha^{[2]} \times \gamma^{[2]} \right]_0^{[0]} \times \left[\alpha^{[2]} \times \gamma^{[2]} \right]_0^{[0]} \right] \end{aligned} \quad (166)$$

Stock¹⁰ hat die Integration durchgeführt. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{1}{e} \frac{1}{R^{e+}} M_{GRm}^{[e]} &= M_e Q_m^{[e]} \\ &+ \lambda_{ee} \left[Q^{[e]} \times \alpha^{[2]} \right]_m^{[e]} \\ &+ \mu_{ee0} \left[Q^{[e]} \times \left[\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]} \right]^{[0]} \right]_m^{[e]} \\ &+ \mu_{ee2} \left[Q^{[e]} \times \left[\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]} \right]^{[2]} \right]_m^{[e]} \\ &+ \mu_{ee4} \left[Q^{[e]} \times \left[\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]} \right]^{[4]} \right]_m^{[e]} \\ &+ \lambda_{e\,e-2} \left[Q^{[e-2]} \times \alpha^{[2]} \right]_m^{[e]} \\ &+ \mu_{e\,e-2\,2} \left[Q^{[e-2]} \times \left[\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]} \right]^{[2]} \right]_m^{[e]} \\ &+ \mu_{e\,e-2\,4} \left[Q^{[e-2]} \times \left[\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]} \right]^{[4]} \right]_m^{[e]} \\ &+ \lambda_{e\,e+2} \left[Q^{[e+2]} \times \alpha^{[2]} \right]_m^{[e]} \\ &+ \mu_{e\,e+2\,2} \left[Q^{[e+2]} \times \left[\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]} \right]^{[2]} \right]_m^{[e]} \\ &+ \mu_{e\,e+2\,4} \left[Q^{[e+2]} \times \left[\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]} \right]^{[4]} \right]_m^{[e]} \\ &+ \lambda_{e\,e-4} \left[Q^{[e-4]} \times \left[\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]} \right]^{[4]} \right]_m^{[e]} \\ &+ \lambda_{e\,e+4} \left[Q^{[e+4]} \times \left[\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]} \right]^{[4]} \right]_m^{[e]} \end{aligned} \quad (167)$$

Die in dieser Gleichung auftretenden Konstanten sind in Tabelle 6 aufgeführt, wobei folgende Abkürzungen benutzt werden:

$$\begin{aligned} \hat{M}_\ell &= M_\ell \sqrt{2C_\ell}^{-1} ; \quad \hat{\lambda}_{\ell\sigma} = \lambda_{\ell\sigma} \sqrt{2C_\sigma}^{-1} \\ \hat{\mu}_{\ell\sigma\tau} &= \mu_{\ell\sigma\tau} \sqrt{2C_\sigma}^{-1} \end{aligned} \quad (168)$$

Gl. 167 lautet in der zweiten Quantisierung:

$$\begin{aligned} M_{GRm}^{[e]} &= \sqrt{\hbar \omega_\ell} M \hat{M}_\ell \left(q_m^{+[e]} + (-)^m q_{-m}^{[e]} \right) \\ &+ \sqrt{\hbar \omega_\ell} M \hat{\lambda}_{\ell\ell} \left([q_m^{+[e]} \times \alpha^{[2]}]^{[e]}_m + [q_m^{[e]} \times \alpha^{[2]}]^{[e]}_m \right) \\ &+ \sqrt{\hbar \omega_\ell} M \sum_{\sigma=0,2,4} \hat{\mu}_{\ell\ell\sigma} \left([q_m^{+[e]} \times [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[\sigma]}]^{[e]}_m + \right. \\ &\quad \left. + [q_m^{[e]} \times [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[\sigma]}]^{[e]}_m \right) \\ &+ \sqrt{\hbar \omega_{\ell+2}} M \hat{\lambda}_{\ell\ell+2} \left([q_m^{+[e+2]} \times \alpha^{[2]}]^{[e]}_m + [q_m^{[e+2]} \times \alpha^{[2]}]^{[e]}_m \right) \\ &+ \sqrt{\hbar \omega_{\ell+2}} M \sum_{\sigma=2,4} \hat{\mu}_{\ell\ell+2\sigma} \left([q_m^{+[e+2]} \times [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[\sigma]}]^{[e]}_m + \right. \\ &\quad \left. + [q_m^{[e+2]} \times [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[\sigma]}]^{[e]}_m \right) \\ &+ \sqrt{\hbar \omega_{\ell+2}} M \hat{\lambda}_{\ell\ell+2} \left([q_m^{+[e+2]} \times \alpha^{[2]}]^{[e]}_m + [q_m^{[e+2]} \times \alpha^{[2]}]^{[e]}_m \right) \\ &+ \sqrt{\hbar \omega_{\ell+2}} M \sum_{\sigma=2,4} \hat{\mu}_{\ell\ell+2\sigma} \left([q_m^{+[e+2]} \times [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[\sigma]}]^{[e]}_m + \right. \\ &\quad \left. + [q_m^{[e+2]} \times [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[\sigma]}]^{[e]}_m \right) \\ &+ \sqrt{\hbar \omega_{\ell+4}} M \hat{\lambda}_{\ell\ell+4} \left([q_m^{+[e+4]} \times [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[4]}]^{[e]}_m + [q_m^{[e+4]} \times [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[4]}]^{[e]}_m \right) \\ &+ \sqrt{\hbar \omega_{\ell+4}} M \hat{\lambda}_{\ell\ell+4} \left([q_m^{+[e+4]} \times [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[4]}]^{[e]}_m + [q_m^{[e+4]} \times [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[4]}]^{[e]}_m \right) \end{aligned} \quad (169)$$

mit

$$M = e R_0^\ell \sqrt{\frac{\epsilon_0}{8\pi}} \sqrt{R_0^3}$$

2.2. Die Renormierung der Konstanten

Die schon erwähnte kanonische Transformation der kollektiven Variablen führt zwangsläufig auch auf eine Renormierung der Konstanten im Dipol- und Quadrupoloperator.

Es wäre inkonsequent, sich auf die Renormierung der Konstanten in den Wechselwirkungsoperatoren zu beschränken, die Konstanten der Multipoloperatoren aber unrenormiert zu benutzen. Auch führte eine solche Handhabung zu falschen Ergebnissen.

Der im letzten Kapitel hergeleitete Multipoloperator lautet in der transformierten Form:

$$\begin{aligned} M_{GR}^{[e]} = & M_\ell \tilde{Q}^{[e]} + M_\ell b_{e1} [\tilde{Q}^{[e]} \times \alpha^{[2]}]^{[e]} + M_\ell \sum_{\sigma} b_{e\sigma} [\tilde{Q}^{[e]} \times \alpha^{[\sigma]}(2)]^{[e]} \\ & + \lambda_{ee} [\tilde{Q}^{[e]} \times \alpha^{[2]}]^{[e]} + \lambda_{ee} b_{e1} [[\tilde{Q}^{[e]} \times \alpha^{[2]}]^{[e]} \times \alpha^{[2]}]^{[e]} + \\ & + \sum_{\sigma} \mu_{e\sigma} [\tilde{Q}^{[e]} \times \alpha^{[\sigma]}(2)]^{[e]} \end{aligned} \quad (170)$$

mit $[\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[\sigma]} = \alpha^{[\sigma]}(2)$

und $[[\hat{Q}^{[e]} \times \alpha^{[2]}]^{[e]} \times \alpha^{[2]}]^{[e]} = \sum_{\sigma} \hat{e} \hat{\sigma} \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 & \sigma \\ e & e & e \end{matrix} \right\} [\tilde{Q}^{[e]} \times \alpha^{[\sigma]}(2)]^{[e]}$

Faßt man einige Terme zusammen und führt neue Konstanten ein, so ergibt sich:

$$M_{GR}^{[e]} = M_\ell \tilde{Q}^{[e]} + \tilde{\lambda}_{ee} [\tilde{Q}^{[e]} \times \alpha^{[2]}]^{[e]} + \sum_{\sigma} \hat{e} \hat{\sigma} \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 & \sigma \\ e & e & e \end{matrix} \right\} \tilde{\mu}_{e\sigma} \cdot [\tilde{Q}^{[e]} \times \alpha^{[2]}]^{[e]} \quad (171)$$

Mit den neuen Konstanten:

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_{ee} &= M_\ell b_{e1} + \lambda_{ee} = M_\ell \left(b_{e1} + \frac{\lambda_{ee}}{M_\ell} \right) \\ \tilde{\mu}_{e\sigma} &= M_\ell b_{e\sigma} + \lambda_{ee} b_{e1} \hat{e} \hat{\sigma} \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 & \sigma \\ e & e & e \end{matrix} \right\} + \mu_{e\sigma} \\ &= M_\ell \left(b_{e\sigma} + \frac{\lambda_{ee}}{M_\ell} b_{e1} \hat{e} \hat{\sigma} \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 & \sigma \\ e & e & e \end{matrix} \right\} + \frac{\mu_{e\sigma}}{M_\ell} \right) \end{aligned} \quad (172)$$

Mit Hilfe der Beziehungen des vorigen Paragraphen kann man auch schreiben:

$$\tilde{\chi}_{\ell\ell} = M_{\ell} \left(\frac{(-)^{\ell+1}}{\hat{\ell}} A_{\ell 1} + \frac{\lambda_{\ell\ell}}{M_{\ell}} \right) \quad (173)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_{\ell\ell\sigma} &= M_{\ell} \left(\frac{1}{2\hat{\ell}} \left(\hat{\sigma} \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 & \sigma \\ \ell & \ell & \ell \end{matrix} \right\} A_{\ell 1} (A_{\ell 1} + 2B_{\ell 1}) - (-)^{\ell} 2A_{\ell\sigma} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda_{\ell\ell}}{M_{\ell}} \frac{(-)^{\ell+1}}{\hat{\ell}} A_{\ell 1} \hat{\ell} \hat{\sigma} \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 & \sigma \\ \ell & \ell & \ell \end{matrix} \right\} + \frac{\mu_{\ell\ell\sigma}}{M_{\ell}} \right) \\ &= M_{\ell} \left(\hat{\sigma} \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 & \sigma \\ \ell & \ell & \ell \end{matrix} \right\} A_{\ell 1} \left(\frac{1}{2\hat{\ell}} (2B_{\ell 1} - A_{\ell 1}) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (-)^{\ell+1} \frac{\tilde{\chi}_{\ell\ell}}{M_{\ell}} - \frac{(-)^{\ell}}{\hat{\ell}} A_{\ell\sigma} + \frac{\mu_{\ell\ell\sigma}}{M_{\ell}} \right) \right) \end{aligned} \quad (174)$$

$$D_{\ell} = \frac{\lambda_{\ell\ell}}{M_{\ell}} \quad (175)$$

$$\tilde{D}_{\ell} = \frac{\tilde{\chi}_{\ell\ell}}{M_{\ell}} = \frac{(-)^{\ell+1}}{\hat{\ell}} + \frac{\lambda_{\ell\ell}}{M_{\ell}} = \frac{(-)^{\ell+1}}{\hat{\ell}} A_{\ell 1} + D_{\ell} \quad (176)$$

$$D_{\ell\sigma} = \frac{\mu_{\ell\ell\sigma}}{M_{\ell}} \quad (177)$$

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{\ell\sigma} &= \frac{\tilde{\mu}_{\ell\ell\sigma}}{M_{\ell}} = \frac{1}{2\hat{\ell}} \left(\hat{\sigma} \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 & \sigma \\ \ell & \ell & \ell \end{matrix} \right\} A_{\ell 1} (A_{\ell 1} + 2B_{\ell 1} - \right. \\ &\quad \left. - (-)^{\ell} 2A_{\ell\sigma} \right) + (-)^{\ell+1} D_{\ell} A_{\ell 1} \hat{\sigma} \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 & \sigma \\ \ell & \ell & \ell \end{matrix} \right\} + D_{\ell\sigma} \end{aligned} \quad (178)$$

$$\left\{ \begin{matrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right\} = \sqrt{\frac{1}{15}} ; \quad \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{10} \sqrt{\frac{7}{3}} ; \quad \hat{\sigma} \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{7}{15}}$$

Die numerische Auswertung für $l=1$ lautet:

$$\tilde{D}_1 = \frac{\tilde{\chi}_{11}}{M_1} = \frac{1}{\sqrt{3}} A_{11} + D_1 = -0.554 \quad (179)$$

$$\begin{aligned}\tilde{D}_{10} &= D_{10} + \frac{1}{2\sqrt{3}} A_{11} (A_{11} + 2B_{11}) + \frac{1}{\sqrt{3}} A_{10} \\ &+ \frac{1}{\sqrt{3.5}} D_1 A_{11} = 0.011\end{aligned}\quad (180)$$

$$\begin{aligned}\tilde{D}_{12} &= D_{12} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{7}{15}} A_1 (A_1 + 2B_1) \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} A_{12} \\ &+ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{7}{15}} D_1 A_1 = D_{12} + \frac{1}{4\sqrt{3}} \sqrt{\frac{7}{5}} A_1 (A_1 + 2B_1) \\ &+ \frac{A_{12}}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{7}{15}} D_1 A_1 = 0.100\end{aligned}\quad (181)$$

Die numerische Auswertung für $l=2$ lautet:

$$\tilde{D}_2 = \frac{\tilde{\lambda}_{22}}{M_2} = -\frac{1}{\sqrt{5}} A_{21} + D_2 = -0.768\quad (182)$$

$$\begin{aligned}\tilde{D}_{20} &= \frac{\tilde{\mu}_{220}}{M_2} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1}{5} A_{21} (A_{21} + 2B_{21}) - 2A_{20} \right) \\ &- \frac{1}{5} D_2 A_{21} + D_{20} = 0.226\end{aligned}\quad (183)$$

$$\begin{aligned}\tilde{D}_{22} &= \frac{\tilde{\mu}_{222}}{M_2} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \left(\sqrt{5} \left(-\frac{3}{70} \right) A_{21} (A_{21} + 2B_{21}) \right. \\ &\left. - 2A_{22} \right) - D_2 A_{21} \sqrt{5} \left(-\frac{3}{70} \right) + D_{22} = 0.019\end{aligned}\quad (184)$$

$$\begin{aligned}\tilde{D}_{24} &= \frac{\tilde{\mu}_{224}}{M_2} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \left(3 \cdot \frac{2}{35} A_{21} (A_{21} + 2B_{21}) - 2A_{24} \right) \\ &- D_2 A_{21} 3 \cdot \frac{2}{35} + D_{24} = 0.310\end{aligned}\quad (185)$$

mit:

$$\begin{aligned}D_2 &= -1.411 & ; & D_{20} = 1.080 \\ D_{22} &= 1.555 & ; & D_{24} = 1.759\end{aligned}\quad (186)$$

2.3. Dipol- und Quadrupoloperator

Der Multipoloperator lautet in der zweiten Quantisierung:

$$D^{[e]} = D_0 \left\{ [q^{+[e]} \times q^{[e]}]^{[e]} + \tilde{D}_e [[q^{+[e]} \times q^{[e]}]^{[e]} \times \alpha^{[2]}]^{[e]} \right. \\ \left. + \sum_{\ell} \tilde{D}_{e\ell} [[q^{+[e]} \times q^{[e]}]^{[\ell]} \times [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[6]}]^{[e]} \right\} \quad (187)$$

mit

$$D_0 = 0.654 \hbar \sqrt{\frac{NZ(1+\kappa)}{A M E_e}}$$

oder anders geschrieben:

$$D^{[e]} = N_0 \left(Q^{[2]} + N_2 [Q^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[2]} \right. \\ \left. + \sum_{\ell} N_{2\ell} [Q^{[2]} \times [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[\ell]}]^{[2]} \right) \quad (188)$$

mit

$$N_0 = \sqrt{\frac{2C_e}{E_e}} D_0 \\ N_2 = \tilde{D}_2 \\ N_{2e} = \tilde{D}_{2e}$$

Explizit lauten Dipol- und Quadrupoloperator:

$$D^{[1]} = D_0 \left\{ [q^{+[1]} \times q^{[1]}]^{[1]} - 0.554 [[q^{+[1]} \times q^{[1]}]^{[1]} \times \alpha^{[2]}]^{[1]} \right. \\ + 0.011 [[q^{+[1]} \times q^{[1]}]^{[1]} \times [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]}]^{[1]} \\ \left. + 0.100 [[q^{+[1]} \times q^{[1]}]^{[1]} \times [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[2]}]^{[1]} \right\} \quad (189)$$

$$D^{[2]} = D_0 \left\{ [q^{+[2]} \times q^{[2]}]^{[2]} \right. \\ - 0.768 [[q^{+[2]} \times q^{[2]}]^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[2]} \\ \left. + 0.226 [[q^{+[2]} \times q^{[2]}]^{[2]} \times [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]}]^{[2]} + \right. \\ \left. + 0.226 [[q^{+[2]} \times q^{[2]}]^{[2]} \times [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[2]}]^{[2]} \right\} \quad (190)$$

$$+ 0.019 \left[\left[q^{+[2]} \times q^{[2]} \right]^{[2]} \times \left[\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]} \right]^{[2]} \right]^{[2]} \\ + 0.310 \left[\left[q^{+[2]} \times q^{[2]} \right]^{[2]} \times \left[\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]} \right]^{[4]} \right]^{[2]}$$

mit

$$D_0 = 0.654 \hbar \sqrt{\frac{NZ(1+\kappa)'}{AM E_\ell}}$$

3. Summenregel für Dipol und Quadrupol

Summiert man den Absorptionsquerschnitt über alle Energien auf, so erhält man die für einen Kern charakteristische Größe, die Dipol- bzw. Quadrupolsumme.

3.1. Die Dipolsummenregel

Die Summenregel für Dipolübergänge lautet:

$$\begin{aligned} SR &= - \langle 0 | [D^{[1]}, [H, D^{[1]}]] | 0 \rangle \\ &= \frac{2}{3} \sum_n E_n | \langle n || D^{[1]} || 0 \rangle |^2 \end{aligned} \quad (191)$$

mit dem Dipoloperator:

$$\begin{aligned} D^{[1]} &= D_0 \left\{ [q^{+[1]} \times q^{[1]}]^{[1]} + \tilde{D}_1 [[q^{+[1]} \times q^{[1]}]^{[1]} \times \alpha^{[2]}]^{[1]} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\sigma=0,2} \tilde{D}_{1\sigma} [[q^{+[1]} \times q^{[1]}]^{[1]} \times [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[\sigma]}]^{[1]} \right\} \end{aligned} \quad (192)$$

und mit den im vorigen Paragraphen errechneten Konstanten. Die Rechnungen wurden zur Dipolsummenregel von Rezvani¹³ durchgeführt. Die entgültige Gleichung lautet:

$$\begin{aligned} SR &= 2D_0^2 \hbar \omega_1 \left\{ \sqrt{3} - n_0 - n_{21} \langle L_2 \rangle - n_{22} \langle L_2^2 \rangle \right. \\ &\quad \left. - n_{23} \langle L_2^3 \rangle - n_{31} \langle L_3 \rangle - n_{32} \langle L_3^2 \rangle \right\} \end{aligned} \quad (193)$$

mit

$$\begin{aligned} L_2 &= [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]} \\ L_3 &= [[\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]} \end{aligned} \quad (194)$$

$$n_0 = - \frac{\hbar^2 \sqrt{3}}{2 \hbar \omega_1 B_2} N_1^2 \quad (195)$$

$$n_{21}' = n_{21} - \frac{2\sqrt{3}\hbar}{\sqrt{5}\hbar\omega_1 B_2} (N_{10}^2 + N_{12}^2) \quad (196)$$

$$n_{21} = 0.2801$$

$$n_{22} = -0.027$$

$$n_{23} = -0.0072$$

$$n_{31} = -0.0748 \quad (197)$$

$$n_{32} = 0.0001$$

$$n = 0.0123$$

$$B_2 = \frac{\hbar^2 C_2}{(\hbar\omega_1)^2} = \frac{5}{2} \frac{\hbar^2}{\hbar\omega_1 \beta_0^2} \quad (198)$$

$$\Rightarrow SR = 1.3194 \frac{\hbar c}{\sqrt{Mc^2}} \sqrt{\frac{3NZ\hbar\omega_1}{4\pi A}} \left\{ \sqrt{3} + 0.1063 \frac{\hbar\omega_2}{\hbar\omega_1} \beta_0^2 - \left(0.2801 - 0.0063 \frac{\hbar\omega_2}{\hbar\omega_1} \beta_0^2 \right) \frac{\beta_0^2}{\sqrt{5}} \right\} \quad (199)$$

$$\langle L_2 \rangle = \langle 0 | [\alpha^{[2]_x} \alpha^{[2]}]^{[0]} | 0 \rangle = \frac{\beta_0^2}{\sqrt{5}} \quad (200)$$

Mit Hilfe der Summenregel entscheidet man, wie viele Zustände in die Rechnung einbezogen werden müssen.

4.2. Die Quadrupolsummenregel

Ligensa¹⁴ hat in seiner Dissertation Rechnungen zur Quadrupolsummen-

regel durchgeführt, die hier in ihren Ergebnissen wiedergegeben werden.

Die Summenregel, die aus dem hydrodynamischen Modell folgt, lautet:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sigma(E)}{E^2} dE = \frac{\pi^2}{5} \frac{e^2}{\hbar c} \cdot \frac{R^2}{Mc^2} \cdot \frac{NZ}{A} \quad (201)$$

Für die einzelnen Zustände $n=1,2,3,\dots$ ergeben sich die folgenden Quadrupolstärken f_n^Q :

n	z_n	f_n^Q
1	3.34	0.78
2	7.29	0.09
3	10.61	0.03
4	13.85	0.02
.	.	.
.	.	.
.	.	.

Tab.: 7

An Hand der Tabelle 7 sieht man, daß die E2-Summenregel schon im ersten Schwingungszustand durch die Riesenresonanz zu 78% ausgeschöpft wird.

In der dynamischen Theorie wird die zu $n=1$ gehörende Quadrupolstärke des sphärischen Kerns auf die große Zahl von E2-Niveaus des dynamisch oszillierenden und deformierten Kerns verteilt.

Berücksichtigt man noch die Austauschterme, so müssen die Rechnungen mit der effektiven Masse M^+ durchgeführt werden.

$$M^+ = \frac{M}{1 + \alpha} \quad (202)$$

Das führt zu einem Anstieg des integrierten Querschnittes.

Die Summenregel nimmt nun folgende Gestalt an:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sigma(E)}{E^2} dE = \frac{\pi^2}{5} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{R^2}{M^+ c^2} \frac{NZ}{A^2} \cdot 0.78 \quad (203)$$

4. Theorie der photonuklearen Streuung und Absorption

In diesem Kapitel sollen die Formeln für Absorption und Streuung hergeleitet werden. Der erste Teil befaßt sich mit dem allgemeinen Formalismus. Im zweiten Teil wird die Übergangswahrscheinlichkeit gleichungsmäßig erfaßt. Die Streuamplitude wird im dritten Teil angegeben. Die Gleichung für den γ -Absorptionsquerschnitt wird im vierten Teil aufgestellt. Im letzten Teil findet sich die Darstellung der γ -Streuquerschnitte für den Dipol- und Quadrupolanteil und für den Interferenzterm zwischen beiden.

4.1. Der allgemeine Formalismus

Bei Streuprozessen (γ, γ') wird zuerst das ungekoppelte System aus 'Strahlungsfeld + Kern' untersucht.

Der Hamiltonoperator H_0 setzt sich zusammen aus dem Operator des Strahlungsfeldes H_{rad} und dem Operator der Kerne H_{nucl} .

$$H_0 = H_{rad} + H_{nucl} \quad (204)$$

ψ_n^0 seien die Eigenzustände von H_0 . Bei $t=t_0$ wird die Störung H_{int} eingeschaltet und es geht

$$\psi_n^0 \rightarrow \psi_n \quad (205)$$

über.

ψ_n wird nach Zuständen von ψ_n^0 entwickelt.

$$\psi_n(t) = \sum_{n'} a_{nn'}(t) \psi_n^0 \quad (206)$$

Die Wahrscheinlichkeit $W_{nn'}$, des Systems aus dem Zustand n in den Zustand n' überzugehen ist:

$$W_{nn'} = \frac{d}{dt} |a_{nn'}|^2 \quad (207)$$

oder bei mehreren Endzuständen:

$$W_{nn'} = \frac{d}{dt} \int |a_{nn'}|^2 \rho(E_{n'}) dE_{n'} \quad (208)$$

wobei $\rho(E_{n'})$ die Dichte der Endzustände der Energien $E_{n'}$ ist.

Aus der zeitabhängigen Schrödingergleichung ergibt sich ein unendliches System gekoppelter Differentialgleichungen 1. Ordnung.

Nach Lösung mittels sukzessiver Approximation ergibt sich bis 2. Ordnung für die Übergangswahrscheinlichkeit:

$$W_{nn'} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| -\langle n' | H_{int} | n \rangle + \frac{1}{\hbar} \sum_{n''} \frac{1}{\omega_{n''n}} \langle n' | H_{int} | n'' \rangle \cdot \langle n'' | H_{int} | n \rangle \right|^2 \rho(E_{n'}) \quad (209)$$

Der Hamiltonoperator für das Strahlungsfeld lautet in der zweiten Quantisierung:

$$H = \sum_{\underline{k}, \lambda} \frac{1}{2} \hbar \omega_{\underline{k}} (a_{\underline{k}\lambda} a_{\underline{k}\lambda}^{\dagger} + a_{\underline{k}\lambda}^{\dagger} a_{\underline{k}\lambda}) \quad (210)$$

mit dem Wellenvektor $\underline{k}$ und der zirkularen Polarisation $\lambda = \pm 1$.

Der Hamiltonoperator des Kernsystems zerfällt in zwei Teile, in erstens die Schwerpunktsbewegung H_{cm} und zweitens die Relativbewegung H_{rm} .

$$H_{nucl} = H_{rm} + H_{cm} \quad (211)$$

wobei

$$H_{cm} = \frac{p^2}{2MA} \quad \text{ist.} \quad (212)$$

M=Nukleonenmasse

A=Anzahl der Nukleonen

Der Hamiltonoperator der Wechselwirkung lautet:

$$H_{int} = -\frac{1}{c} \int \underline{j} \underline{A} d\tau \quad (213)$$

wobei $\underline{A}$ in Coulombbeziehung vorliegt.

$\underline{j}$ ist die Kernstromdichte.

$$\underline{A} = \sum_{\underline{k}, \lambda} \sqrt{\frac{2\hbar\pi c}{V \omega_{\underline{k}}}} (\epsilon_{\underline{k}\lambda} a_{\underline{k}\lambda} e^{i\underline{k}\cdot\mathbf{r}} + \epsilon_{\underline{k}'\lambda'} a_{\underline{k}'\lambda'}^{\dagger} e^{-i\underline{k}'\cdot\mathbf{r}}) \quad (214)$$

Den Gesamtstrom zerlegt man in zwei Teile, in $\underline{j}_{cm}$ (Schwerpunktsbewegung) und $\underline{j}_{rm}$ (Relativbewegung). Für $\underline{j}_{cm}$ ergibt sich:

$$\underline{j}_{cm} = \frac{Ze}{AMc} \underline{p} - \frac{Ze^2}{AMc^2} \underline{A} \quad (215)$$

Somit spaltet auch H_{int} in zwei Teile auf:

$$H_{int} = H_{cm}^{int} + H_{rm}^{int} \quad (216)$$

wobei $H_{cm}^{int} = \int d\tau \left(-\frac{Ze}{AMc^2} \underline{A} \underline{p} + \frac{Ze^2}{2AMc^2} \underline{A}^2 \right)$ und

$$H_{rm}^{int} = -\frac{1}{c} \int d\tau \underline{j}_{rm} \underline{A} \quad (217)$$

ist.

4.2. Die Übergangswahrscheinlichkeit

Bei Photonenstreuexperimenten kann sich die Energie ändern, die Photonenzahl bleibt jedoch erhalten. Zur Streuamplitude tragen somit nur in $\tilde{A}$ quadratische Terme bei, denn nur dann sind die anzahlhaltenden Operatoren vorhanden.

In erster Ordnung liefern für den Streuprozess nur in $\tilde{A}$ quadratische Terme, hingegen zweiter Ordnung nur in $\tilde{A}$ lineare Terme einen Beitrag.

H_{cm}^{int} bildet somit in der Streuamplitude $a_{nn'}$, das Glied erster Ordnung, während H_{rm}^{int} nur zum Glied zweiter Ordnung beiträgt.

Sei j_{rm} von $\tilde{A}$ unabhängig, dann bleibt als einziges quadratisches Glied der Term $\frac{Z^2 e^2}{2AMc^2} \tilde{A}^2$ übrig. Dieser beschreibt die Thomsonstreuung am Kern als Ganzem. Bei ruhenden Kernen verschwindet das Glied zweiter Ordnung bei H_{cm}^{int} .

Für die Übergangswahrscheinlichkeit erhält man den Ausdruck:

$$W_{nn'} = \frac{2\pi}{\hbar} |K_{nn'}|^2 \rho(E_{n'}) \quad (218)$$

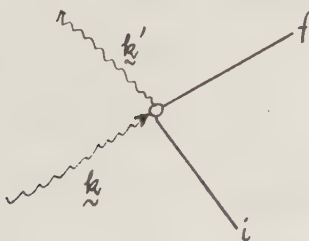
mit

$$K_{nn'} = -\langle n' | \frac{Z^2 e^2}{2AMc^2} \tilde{A}^2 | n \rangle + \frac{1}{\hbar} \sum_{n''} \frac{1}{\omega_{n''n}} \langle n' | H_{rm}^{int} | n'' \rangle \langle n'' | H_{rm}^{int} | n \rangle \quad (219)$$

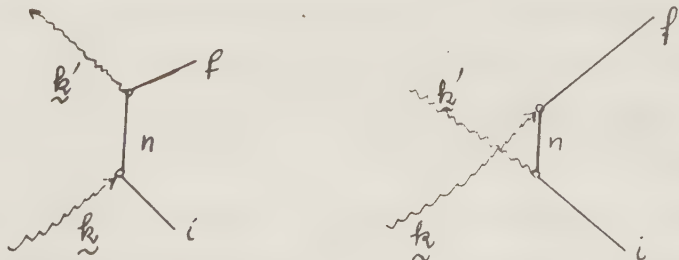
Der Streuprozess bedeutet, daß ein Photon des Wellenvektors $\underline{k}$ und der Polarisierung λ vernichtet wird und ein anderes Photon ($\underline{k}', \lambda'$) erzeugt wird. Der Kern geht dabei vom Zustand i in den Zustand f über.

Die Graphen der Prozesse erster und zweiter Ordnung sind:

1. Ordnung



2. Ordnung



Arenhövel¹⁵ hat die Matrixelemente berechnet.

Setzt man diese in die Gleichung für die Übergangswahrscheinlichkeit ein, so ergibt sich:

$$W_{nn'} = \frac{8\pi^3 \hbar c^2}{V^3 k k'} N_{k\lambda} |K_{if}|^2 \sum_{\text{ENDZUSTÄNDE}} (N_{k'\lambda} + 1) \left| \frac{e^{i\omega_{nn'}t} - 1}{\omega_{nn'}} \right|^2 \quad (220)$$

Es gilt:

$$\sum_{\text{ENDZUSTÄNDE}} 1 = \int \rho(E_{n'}) dE_{n'} \quad ; \quad \rho(E_{n'}) = \frac{V k'^2}{8\pi^3 \hbar c^2} \quad (221)$$

$$\sum_{\text{ENDZUSTÄNDE}} N_{k'\lambda'} = \int \frac{V}{\hbar \omega'} \bar{n} d\omega'$$

mit $\bar{n}$ als Energiedichte pro Frequenzintervall $d\omega'$. Der Raumwinkel ist Ω . Die Gl. 220 lautet dann:

$$W_{nn'} = \frac{c k'}{V k} N_{k\lambda} |K_{if}|^2 \left(1 + \left(\frac{2\pi}{k'} \right)^3 \frac{u}{\hbar} \right) \quad (222)$$

mit

$$\begin{aligned} K_{if} = & -\frac{Z^2 e^2}{A M c^2} \underline{e}_{k\lambda} \underline{e}_{k'\lambda'} \delta_{if} \\ & + \frac{1}{c^2} \sum \frac{\langle f | \int i \tau m \underline{e}_{k'\lambda'}^* e^{-ik'r} d\tau | n \rangle \langle n | \int i \tau m \underline{e}_{k\lambda} e^{ik'r} d\tau | i \rangle}{E_{ni} - E - \frac{i}{2} T_n} \\ & + \frac{\langle f | \int i \tau m \underline{e}_{k\lambda} e^{ik'r} d\tau | n \rangle \langle n | \int i \tau m \underline{e}_{k'\lambda'}^* e^{-ik'r} d\tau | i \rangle}{E_{ni} + E' + \frac{i}{2} T_n} \end{aligned} \quad (223)$$

Die Breiten T_n tragen der endlichen Lebenszeit Rechnung.

4.3. Die Streuamplitude für Dipol- und Quadrupolstreuung

Der differentielle Streuquerschnitt ist die Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeit und einfallendem Fluß.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{k'}{k} |K_{if}|^2 \quad (224)$$

Mit der Streuamplitude K_{if} , die im folgenden berechnet wird.

Arenhövel¹⁵ erhält für die Streuamplitude:

$$\begin{aligned} K_{if} = & (-)^{p'} \left(\frac{Z^2 e^2}{A M c^2} \right) D_{-p, p'}^{[1]} \delta_{if} + \sum_{L=1}^{\infty} \sum_{L'=0}^{\infty} (-)^{I_f - M_i} (2L' + 1) \cdot \\ & \cdot \begin{pmatrix} L & L & L' \\ p & M & -M-p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & I_f & I_i \\ M_i p & -M_f & M_i \end{pmatrix} \bar{R}_{L'}^L D_{M_i - p'}^L \end{aligned} \quad (225)$$

mit

$$\bar{P}_{L'}^L = \sum_n (-)^L \left\{ \begin{matrix} L' & I_f & I_i \\ I_n & L & L \end{matrix} \right\} (C_{2n}^L + (-)^{L'} C_{1n}^L) \quad (226)$$

wobei

$$C_{1n}^L = C_{1n}^{LL} \langle I_f \alpha_f \| \int j_{rm} A_L^{k'} d\tau \| I_n \alpha_n \rangle \langle I_n \alpha_n \| \int j_{rm} A_L^k d\tau \| I_i \alpha_i \rangle \quad (227)$$

und

$$C_{2n}^L = C_{2n}^{LL} \langle I_f \alpha_f \| \int j_{rm} A_L^k d\tau \| I_n \alpha_n \rangle \langle I_n \alpha_n \| \int j_{rm} A_L^{k'} d\tau \| I_i \alpha_i \rangle \quad (228)$$

sind.

I_i, I_f und I_n sind die Spins von Anfang-, End- und Zwischenzustand. M_i, M_f und M_n sind die entsprechenden magnetischen Quantenzahlen. Legt man die Quantisierungsachse in Richtung des einfallenden Photons, summiert über alle M und n und berechnet die auftretenden $3j$ -Symbole, so erhält man nach Arenhövel¹⁵ für das Quadrat der Streuamplitude:

$$|K_{if}|^2 = \sum_{L, K, L', K', \gamma, \gamma', X, M} (-)^{\bar{M} + M' + L' + \gamma'} (2L'+1)(2K'+1)(2\gamma'+1) \cdot \\ \cdot (2\gamma+1)(2X+1) \begin{pmatrix} L' & I_f & I_i \\ M & -M_f & M_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K' & I_f & I_i \\ M' & -M_f & M_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & K' & \gamma' \\ M' & -M' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & K & \gamma \\ -p' & p' & 0 \end{pmatrix} \cdot \\ \cdot \begin{pmatrix} X & \gamma & \gamma' \\ 0 & \bar{M} & -\bar{M} \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} L & K & X \\ L' & K' & \gamma' \end{matrix} \right\} \bar{P}_{L'}^L \bar{P}_{K'}^{K*} D_{\bar{M}}^{\gamma}(\Theta) D_{0\bar{M}}^{\gamma'}(\Theta_i) \quad (229)$$

Auf Grund der Entartung der Zustände in den magnetischen Quantenzahlen muß man über M_i mitteln und über M_f summieren. Sei $a(M_i)$ die Wahrscheinlichkeit, daß sich der Kern im Zustand M_i befindet, so gilt:

$$|K_{if}|^2 = \sum_{M_i M_f} a(M_i) |K_{if}|^2 \quad (230)$$

Wenn die einfallenden Photonen nur teilweise polarisiert sind und der Detektor nur auf einen Polarisationszustand anspricht, dann ergibt sich mit $e(p)$ als Wahrscheinlichkeit, daß das einfallende Photon die Polarisation p besitzt:

$$|K_{if}|^2 = \sum_{p p'} e(p) e'(p') |K_{if}|^2 \quad (231)$$

$e'(p')$ ist hierbei die Ansprechwahrscheinlichkeit des Detektors.

In der Schreibweise von Arenhövel¹⁵ erhält man:

$$|K_{if}|^2 = \sum_{L,K,L',K'} \bar{P}_{L'}^L \bar{P}_{K'}^{K*} G_{L'K'}^{LK} (a(M_i), e(p), e'(p'), \Theta_i', \Theta) \quad (232)$$

mit

$$\begin{aligned} G_{L'K'}^{LK} (a(M_i), e(p), e'(p'), \Theta_i', \Theta) = \\ = \sum_{M_i, p, p'} a(M_i) e(p) e'(p') \sum_{J, J', X, \bar{M}} (-)^{\bar{M}-K'+J'-I_i-M_i} \cdot \\ (2L'+1)(2K'+1)(2J'+1)(2J+1)(2X+1) \cdot \\ \left(\begin{matrix} L & K & J \\ p & -p & 0 \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} L & K & J \\ M_i & -M_i & 0 \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} L & K & J \\ -p' & p' & 0 \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} X & J & J' \\ 0 & \bar{M} & -\bar{M} \end{matrix} \right) \left\{ \begin{matrix} e_i & e_i & J' \\ K' & L' & I_i \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} L & K & X \\ L' & K' & J' \end{matrix} \right\} \cdot \\ \cdot D_{0\bar{M}}^{J'}(\Theta_i') D_{\bar{M}0}^J(\Theta) \end{aligned} \quad (233)$$

Die $G_{L'K'}^{LK}$ beschreiben die geometrischen Eigenschaften des Streuproblems.

Die $\bar{P}_{L'}^L$ beschreiben die dynamischen Eigenschaften.

Bei Streuung an unpolarisierten Kernen ist:

$$a(M_i) = \frac{1}{2\ell_i+1} \quad (234)$$

In diesem Fall ergibt sich für die $G_{L'K'}^{LK}$:

$$\begin{aligned} G_{L'K'}^{LK} (a(M_i) = \frac{1}{2\ell_i+1}, e(p), e'(p'), \Theta_i = 0, \Theta) = \\ = \delta_{L'K'} \sum_{p, p'} e(p) e'(p') \sum_J (-)^{L+K+L'} (2L'+1) \cdot \\ \cdot (2J+1) \left(\begin{matrix} L & K & J \\ -p' & p' & 0 \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} L & K & J \\ p & -p & 0 \end{matrix} \right) \left\{ \begin{matrix} L & K & J \\ K & L & L' \end{matrix} \right\} P_J(\cos \Theta) \end{aligned} \quad (235)$$

Bei Streuung an unpolarisierten Kernen verschwinden also die Interferenzen zwischen den verschiedenen Polarisierbarkeiten.

Streut man mit unpolarisierten Photonen und untersucht die gestreuten Photonen nicht auf den Polarisationszustand, d.h.:

$$e(p) = \frac{1}{2} \quad ; \quad e'(p') = 1 \quad (236)$$

$$p, p' = \pm 1$$

dann erhält man:

$$\begin{aligned} |\overline{K}_{if}|^2 &= \frac{1}{2(2\ell_i+1)} \sum_{p_i, p'_i, M_i, M} |K_{it}|^2 = \\ &= \frac{1}{2\ell_i+1} \sum_{L_i, K_i=1}^2 \sum_{L'=0}^{2L} g_{L'}^{KL} \overline{P}_{L'}^L \overline{P}_{K'}^{K*} \end{aligned} \quad (237)$$

wobei

$$g_{L'}^{KL}(\Theta) = 2 \sum_{J+K} (-)^{-K-L-L'} (2L'+1)(2J+1) \begin{pmatrix} L & K & J \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} L & K & J \\ K & L & L' \end{Bmatrix} \quad (238)$$

ist. Es gilt:

$$g_{L'}^{KL} = g_{L'}^{LK} \quad (239)$$

Die $g_{L'}^{11}$ beschreiben die Winkelverteilung der Dipolstreuung (L=0 die skalare, L=1 die vektorielle und L=2 die tensorielle Dipolstreuung).

Das entsprechende gilt für $g_{L'}^{22}$ bezüglich der Quadrupolstreuung. Die Interferenzglieder sind durch $g_{L'}^{12}$ gegeben.

Explizit erhält man:

$$\begin{aligned} g_0^{11} &= \frac{1}{6} (1 + \cos^2 \Theta) \\ g_1^{11} &= \frac{1}{4} (2 + \sin^2 \Theta) \\ g_2^{11} &= \frac{1}{12} (13 + \cos^2 \Theta) \end{aligned} \quad (240)$$

$$\begin{aligned} g_0^{12} &= -\frac{1}{\sqrt{15}} \cos^3 \Theta \\ g_1^{12} &= -\frac{1}{2\sqrt{5}} \cos \Theta (1 + 2 \sin^2 \Theta) \\ g_2^{12} &= -\frac{1}{2\sqrt{21}} \cos \Theta (3 + 2 \cos^2 \Theta) \end{aligned} \quad (241)$$

$$\begin{aligned} g_0^{22} &= \frac{1}{10} (1 - 3 \cos^2 \Theta + 4 \cos^4 \Theta) \\ g_1^{22} &= \frac{1}{20} (3 + 15 \cos^2 \Theta - 16 \cos^4 \Theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_2^{22} &= \frac{1}{28} (13 - 15 \cos^2 \Theta + 16 \cos^4 \Theta) \\
 g_3^{22} &= \frac{1}{5} (3 - \cos^4 \Theta) \\
 g_4^{22} &= \frac{1}{35} (24 + 3 \cos^2 \Theta + \cos^4 \Theta)
 \end{aligned} \tag{242}$$

Für die Streuung an polarisierten Kernen mit unpolarisierter Strahlung und keiner Polarisationsanalyse der Strahlung ergibt sich:

$$|\overline{K}_{if}|^2 = \sum_{L, K, L', K'} \overline{P}_L^L \overline{P}_{K'}^{K*} h_{L'K'}^{LK} (a(M_i), \Theta_i', \Theta) \tag{243}$$

mit

$$\begin{aligned}
 h_{L'K'}^{LK} (a(M_i), \Theta_i', \Theta) &= G_{L'K'}^{LK} (a(M_i), e(p)=\frac{1}{2}, e'(p')=1, \Theta_i', \Theta) = \\
 &= 2 \sum_{J, J', X, \bar{M}, M_i} (-)^{\bar{M}-K'+J'-I_i-M_i} a(M_i) (2L'+1)(2K'+1) \cdot \\
 &\cdot (2J'+1)(2J+1)(2X+1) \begin{pmatrix} \ell_i & \ell_i & J' \\ M_i & -M_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & K & J \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & K & X \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & J & J' \\ 0 & \bar{M} & -\bar{M} \end{pmatrix} \cdot \\
 &\cdot \left\{ \begin{matrix} \ell_i & \ell_i & J' \\ K' & L' & I_i \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} L & K & X \\ L' & K' & J \end{matrix} \right\} D_{0\bar{M}}^{J'}(\Theta_i') D_{\bar{M}0}^J(\Theta)
 \end{aligned} \tag{244}$$

Die Winkelverteilung hängt hier von der Kernorientierungsachse ab. Die Rechnungen, die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführt werden, beschränken sich auf die Streuung an unpolarisierten Kernen.

4.4. Der Absorptionsquerschnitt

Aus der elastischen Streuamplitude in Vorwärtsrichtung kann man nach dem optischen Theorem den Absorptionsquerschnitt bestimmen. Für unpolarisierte Strahlung erhält man:

$$\sigma_{abs} = 4\pi \chi \sum_{p, M_i} \frac{1}{2} a(M_i) \operatorname{Im} K_{ii} (E'=E, \Theta=0) \tag{245}$$

mit

$$\begin{aligned}
 K_{ii} (E=E', \Theta=0) &= - \sum_{L=1}^{\infty} \sum_{L'=0}^{2L} (-)^{\ell_i-M_i} (2L'+1) \cdot \\
 &\cdot \begin{pmatrix} L & L & L' \\ p & -p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & I_i & I_i \\ 0 & -M_i & M_i \end{pmatrix} \overline{P}_{L'}^L P_{L'}^L (\cos \Theta)
 \end{aligned} \tag{246}$$

wobei Θ der Winkel zwischen Einfallsrichtung und Kernorientierungsachse ist.

Man erhält aus Absorptionsmessungen an nicht ausgerichteten Kernen auf Grund der Dispersionsrelationen und des optischen Theorems nur den skalaren Anteil der elastischen Streuung. Dieser ist bei gg-Kernen mit $l_i=0$ gleich der gesamten elastischen Streuung.

Der Absorptionsquerschnitt für Dipolabsorption ist:

$$\begin{aligned} \sigma_{abs}^D &= \frac{4\pi}{3} \frac{e^2 \hbar}{Mc} \sum_n \frac{E_{ni}^2 \overline{T_n} f_n}{(E_{ni}^2 - E^2 + \frac{1}{4} \overline{T_n}^2) + (\overline{T_n} E)^2} \frac{NZ}{A} (1 + \alpha) = \\ &= \frac{1}{\hat{I}_i} \frac{32\pi^2}{9} \frac{e^2}{\hbar c} \sum_n \frac{E_{ni} \overline{T_n} E_{ni} |\langle n \| D^{[1]} \| i \rangle|^2}{(E_{ni} - E + \frac{1}{4} \overline{T_n}^2)^2 + (\overline{T_n} E)^2} \end{aligned} \quad (247)$$

mit den Dipolstärken:

$$f_n = \frac{1}{2\ell_i + 1} \cdot \frac{8\pi}{3} \frac{E_{ni} M}{\hbar^2} |\langle n \| D^{[1]} \| i \rangle|^2 / \frac{ZN}{A} (1 + \alpha) \quad (248)$$

Für den Absorptionsquerschnitt der Quadrupolabsorption gilt:

$$\sigma_{abs}^Q = \frac{1}{2\ell_i + 1} \frac{8\pi^2}{75} \frac{e^2}{(\hbar c)^3} E^2 \sum_n \frac{E_{ni}^2 \overline{T_n} E_{ni} |\langle n \| Q^{[2]} \| i \rangle|^2}{(E_{ni}^2 - E^2 + \frac{1}{4} \overline{T_n}^2)^2 + (\overline{T_n} E)^2} \quad (249)$$

4.5. Der Streuquerschnitt

Hier werden nun explizit die Ausdrücke für Dipol- und Quadrupolstreuquerschnitt und für den Interferenzterm angegeben.

a) Für den Dipolstreuquerschnitt:

$$\frac{d\sigma^D}{d\Omega} = \frac{1}{2\ell_i + 1} \frac{E'}{E} \sum_{L'=0}^2 Q_{L'}^{11} \left| \frac{4\pi}{3} \frac{1}{(\hbar c)^2} \sum_n \begin{Bmatrix} L' & I_f & I_i \\ I_n & 1 & 1 \end{Bmatrix} \right. \quad (250)$$

$$\begin{aligned} &\cdot E_{nf} E_{ni} \langle f \| D^{[1]} \| n \rangle \langle n \| D^{[1]} \| i \rangle \left(\frac{1}{E_{ni} + E' + \frac{1}{2} \overline{T_n}} + \right. \\ &\left. + \frac{(-)^{L'}}{E_{ni} - E - \frac{1}{2} \overline{T_n}} \right) + \delta_{if} \delta_{L'0} (-)^{2\ell_i} \sqrt{3(2\ell_i + 1)} \frac{Z^2 E^2}{AMc^2} \Big|^2 \end{aligned}$$

b) Für den Quadrupolstreuquerschnitt:

$$\frac{d\sigma^Q}{d\Omega} = \frac{1}{2\ell_i+1} \frac{E'}{E} \sum_{L'=0}^4 g_{L'}^{22} \left| \frac{\gamma}{15} \frac{EE'}{(\hbar c)^4} \sum_n \begin{Bmatrix} L' & I_f & I_i \\ I_n & 2 & 2 \end{Bmatrix} \right. \\ \left. \cdot E_{n_f} E_{n_i} \langle f \| Q^{[2]} \| n \rangle \langle n \| Q^{[2]} \| i \rangle \left(\frac{1}{E_{n_i} + E' + \frac{1}{2} \overline{I_n}} + \frac{(-)^{L'}}{E_{n_i} - E - \frac{1}{2} \overline{I_n}} \right) \right|^2 \quad (251)$$

c) Für den Interferenzterm:

$$\frac{d\sigma^{DQ}}{d\Omega} = \frac{2}{2\ell_i+1} \frac{E'}{E} \sum_{L'=0}^2 g_{L'}^{12} \operatorname{Re} P_{L'}^1 P_{L'}^{2*} \quad (252)$$

Bei gg-Kernen mit $l_i=0$ trägt nur das Glied mit $L'=I_f$ zur Streuung bei, da in den anderen Fällen das 6j-Symbol verschwindet. Daher liefert bei den gg-Kernen zur elastischen Streuung nur der skalare Anteil einen Beitrag.

5. Ergebnisse

In diesem Kapitel sollen die Ergebnisse dargestellt werden, die mit Hilfe der in den vorigen Paragraphen besprochenen Theorie berechnet wurden.

Zuerst wird auf die Frage der Konvergenz und der Genauigkeit eingegangen. Dann werden schematische Studien gezeigt, die den Verlauf der E2-Absorptionsquerschnitte eines anharmonischen Vibrators, eines prolaten und eines oblaten Rotationskerns und eines asymmetrischen Kreisels darstellen.

Der letzte Teil zeigt die E2-Absorptionsquerschnitte für verschiedene Isotopenreihen. In diesem Teil werden ebenfalls Vergleiche mit experimentellen Daten vorgenommen.

5.1. Konvergenz und Genauigkeit

Die Diagonalisierung des Hamiltonoperators erfolgt in der Basis eines fünfdimensionalen harmonischen Oszillators.

Gneuss³ hat in schematischen Studien untersucht, wie groß die Basis des Oszillators und welche Oszillatorkonstanten bei den verschiedenen Kerntypen gewählt werden müssen, damit die Konvergenz der Wellenfunktionen und die Genauigkeit der Energien und Übergangswahrscheinlichkeiten sichergestellt ist.

In diesen Studien wurde sowohl die Phononenzahl N bei festen Oszillatorkonstanten, für die das Produkt $B_2' C_2'$ maßgebend ist, als auch das Produkt $B_2' C_2'$ bei konstant gehaltener Phononenzahl geändert.

Ähnliche Studien hat Sedlmayr¹⁶ für einige Isotopenreihen des Periodensystems durchgeführt.

Rezwani¹³ hat Konvergenzstudien für die Dipolriesenresonanzen durchgeführt.

In dieser Arbeit werden die Studien für die E2-Riesenresonanzen dargestellt. Für einen anharmonischen Vibrator, einen prolaten Rotationskern, einen asymmetrischen Kreisel und einen Kern mit zwei Minima werden zum einen die Phononenzahl von 5 bis 30 Phononen, im Abstand von 5 Phononen, variiert, und zum andern bei einer festen Phononenzahl von 20 das Produkt $B_2' C_2'$ von 500 bis 40000 ge-

ändert. Zusätzlich wird bei der Phononenänderung die zur Phononenzahl N gehörige Matrixgröße P angegeben.

Für die Untersuchungen im Niederenergiebereich genügen ca. 15 Niveaus. Für die E1-Riesenresonanzen benötigt man zur guten Ausschöpfung der Summenregel 40 bis 50 Niveaus. Für die E2-Riesenresonanzen ist es oft notwendig, über 100 Niveaus mitzunehmen.

Benötigte Gneuss für eine ausgezeichnete Konvergenz beim anharmonischen Vibrator 15 Phononen, so sind es bereits 25 Phononen bei den E1-Riesenresonanzen. Bei den E2-Riesenresonanzen muß man hier mit 30 Phononen rechnen. Für leicht deformierte Kerne und Übergangskerne benötigt man für die E2-Riesenresonanzen 32 Phononen.

Für stark deformierte Kerne, z.B. Kerne mit zweitem Minimum, kommt man bei den E1-Riesenresonanzen für eine ausgezeichnete Konvergenz mit 32 Phononen aus. Für eine solche Konvergenzgüte müßte man das Modell der E2-Riesenresonanzen auf 40 bis 50 Phononen ausdehnen. Dieses wiederum würde jeden zur Verfügung stehenden Speicherplatz eines modernen Computers sprengen.

Man muß sich deshalb mit einer mäßigen Konvergenz bei starken Rotatoren abfinden.

Die in dieser Arbeit dargestellten Kerne wurden mit 32 Phononen gerechnet.

Die Untersuchungen der Änderung des B_2C_2 -Wertes zeigt, daß ein Produkt von $B_2C_2=10000$ für alle Kerne am günstigsten ist.

Konvergenzuntersuchung an einem anharmonischen Vibrator

Variation der Phononenzahl bei konstantem Produkt $B_2' C_2' = 5000$

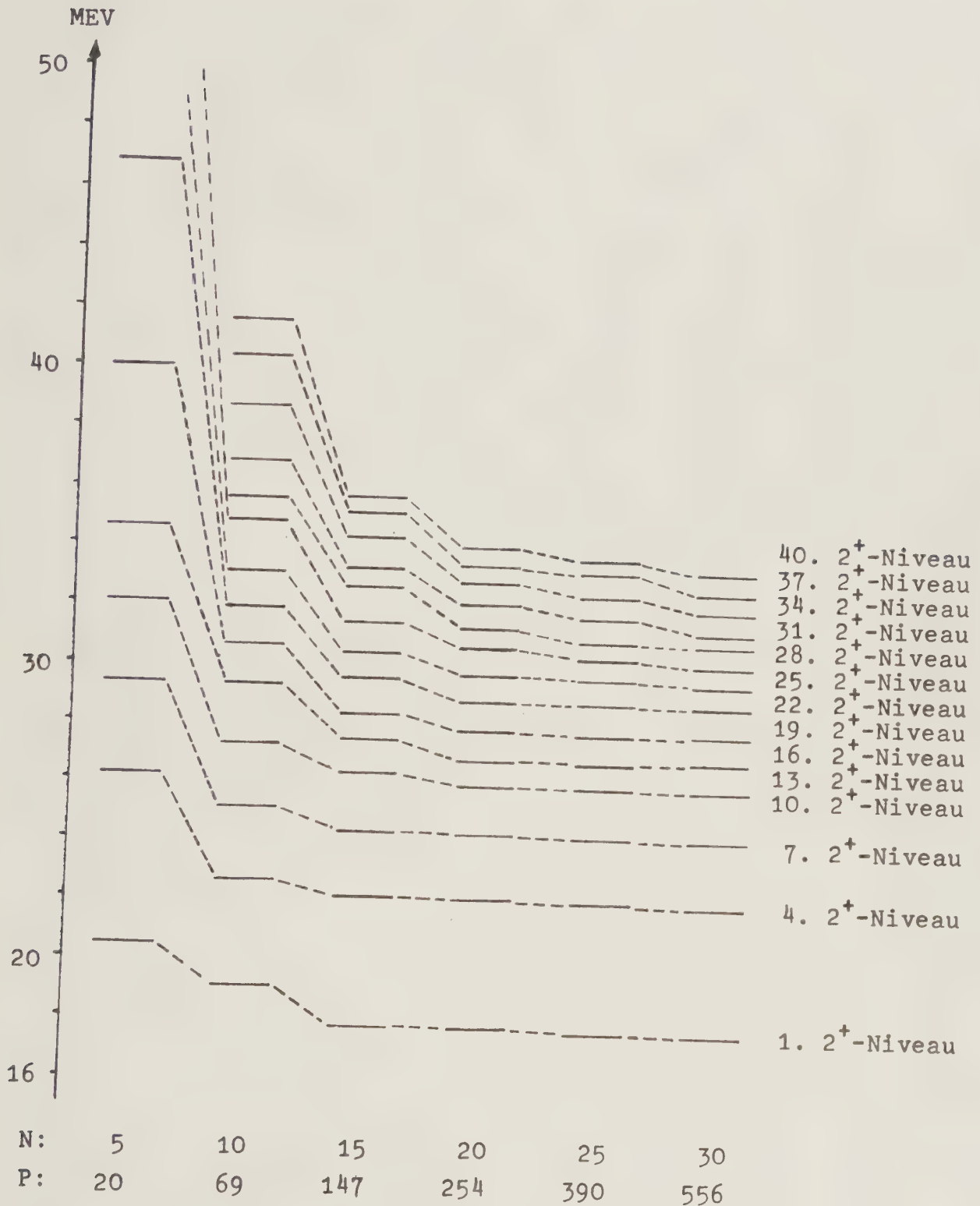


Fig.: 4

Konvergenzuntersuchung an einem prolaten Rotationskern

Variation der Phononenzahl bei konstantem Produkt $B_2' C_2' = 5000$

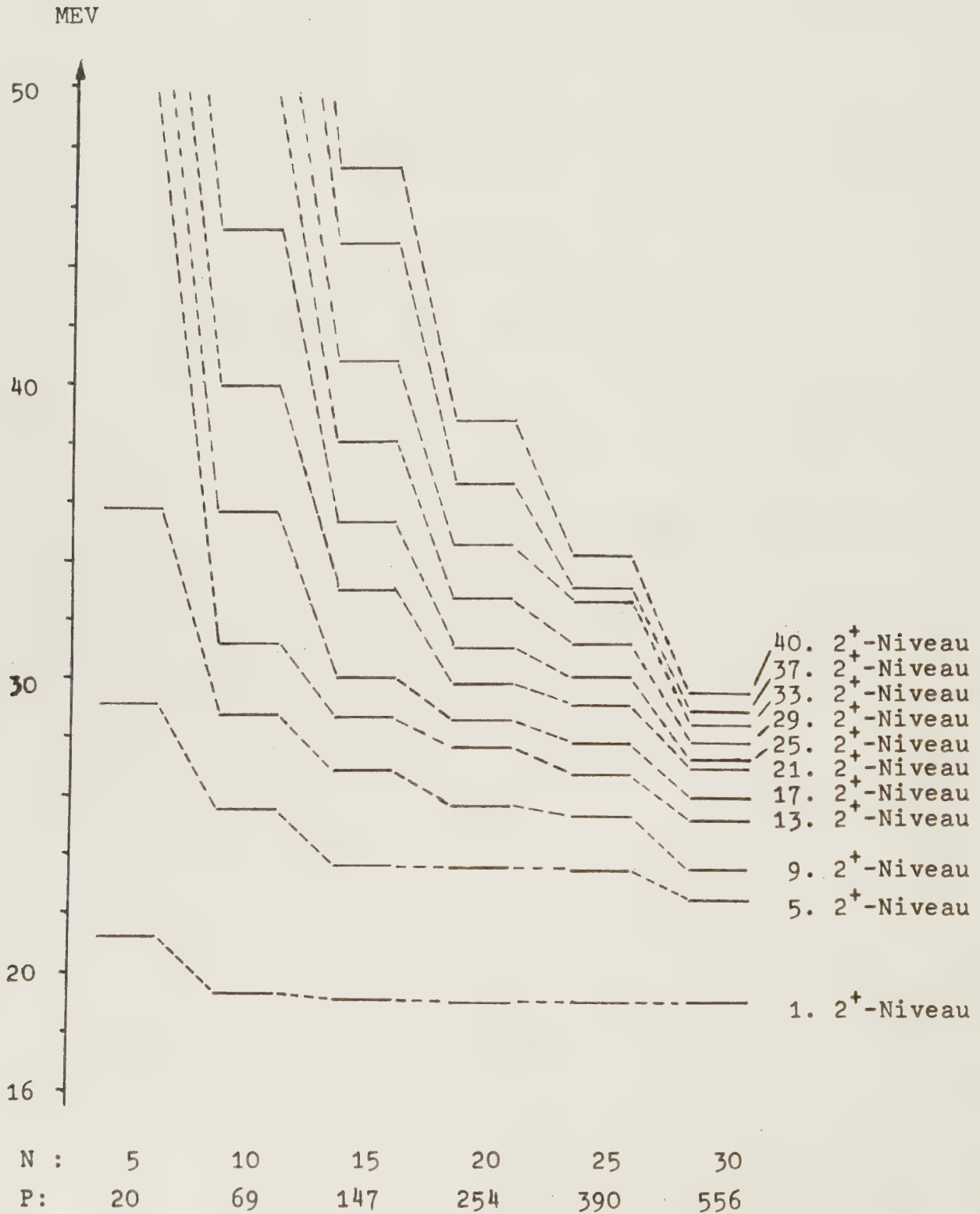


Fig.: 5

Konvergenzuntersuchung an einem asymmetrischen Kreisel

Variation der Phononenzahl bei konstantem Produkt $B_2' C_2' = 5000$

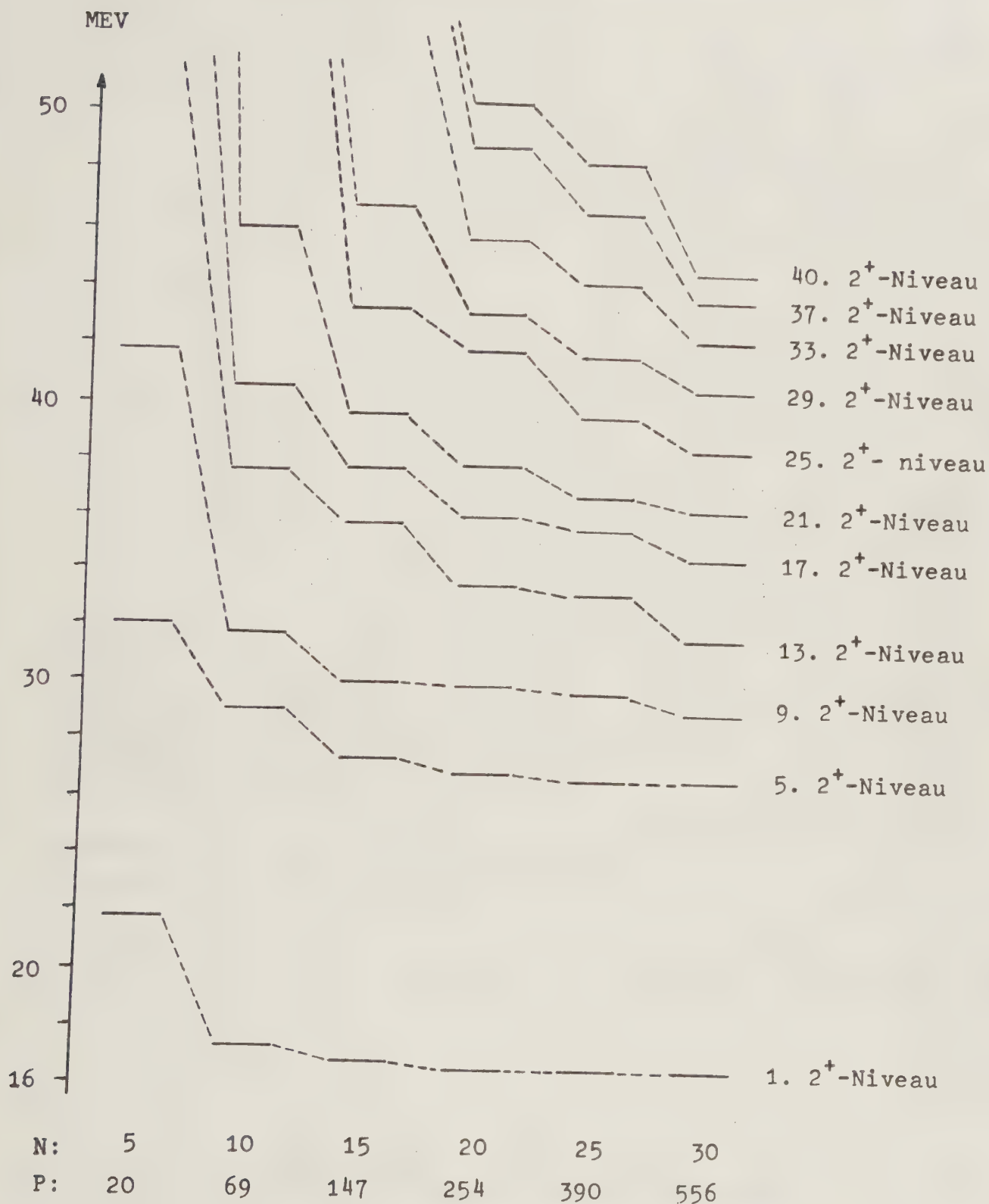


Fig.: 6

Konvergenzuntersuchung an einem Kern mit zwei Minima

Variation der Phononenzahl bei konstantem Produkt $B_2' C_2' = 5000$

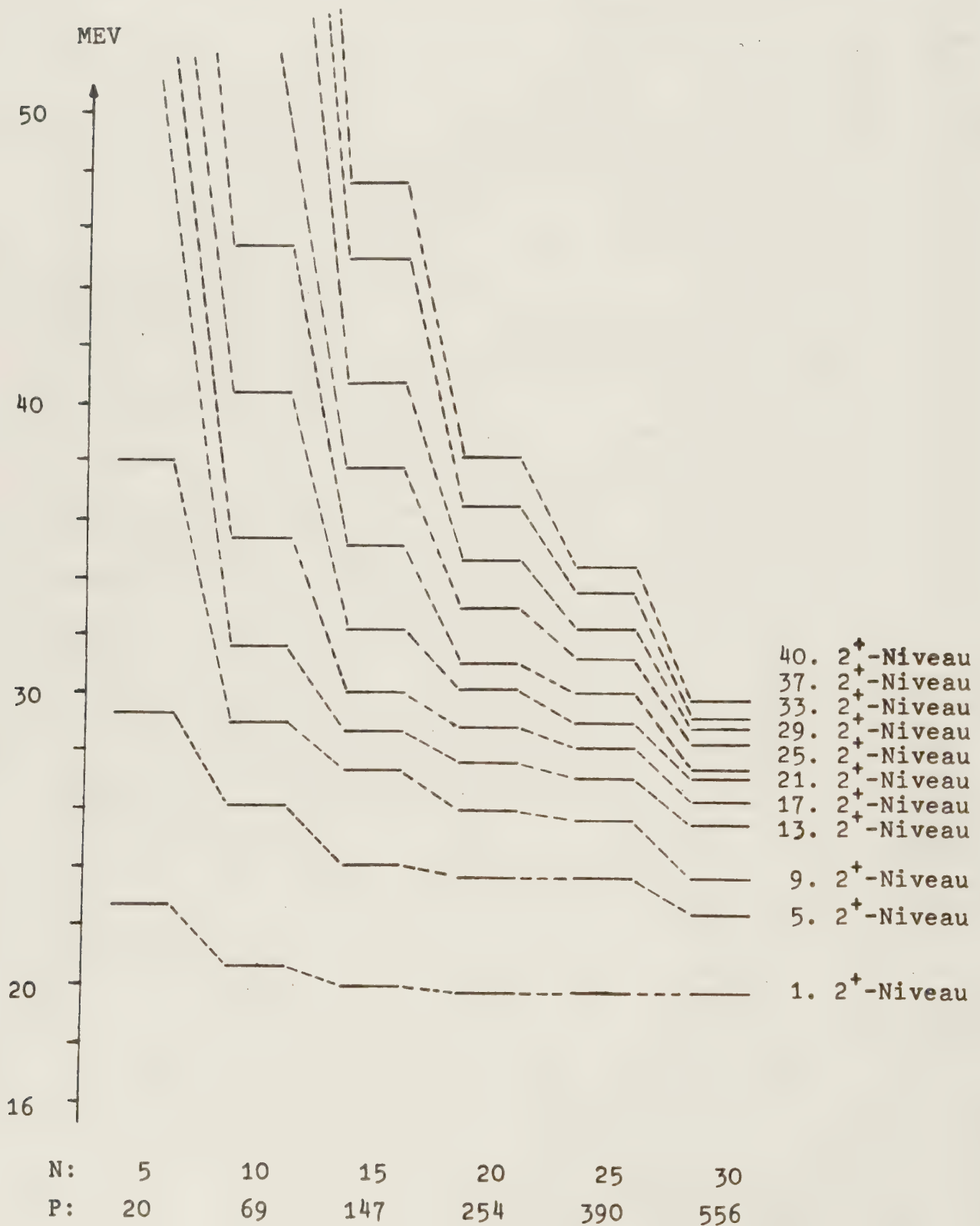


Fig.: 7

Konvergenzuntersuchung an einem anharmonischen Vibrator

Variation des Produktes $B_2' C_2'$ bei einer Phononenzahl von 20

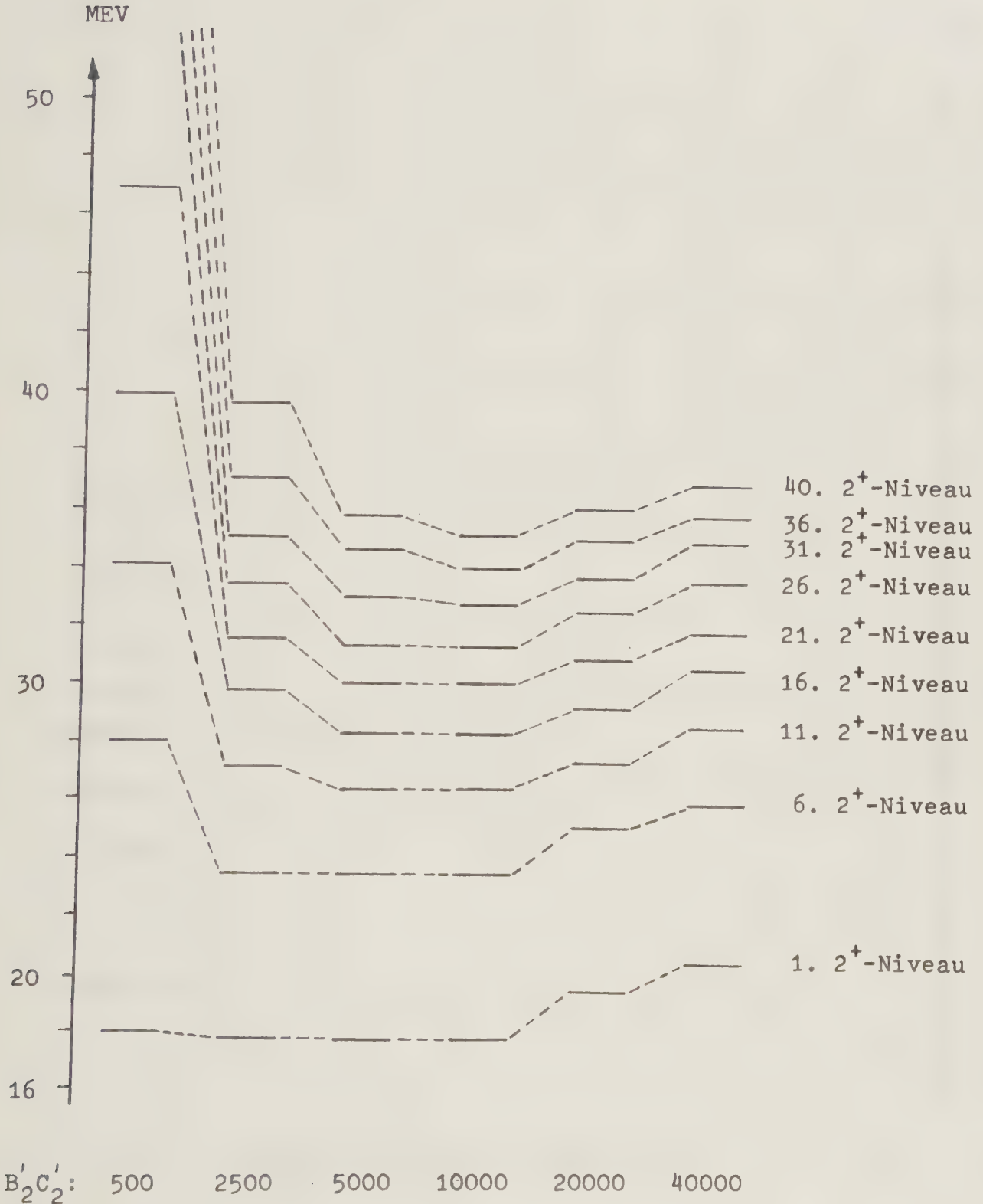


Fig.: 8

Konvergenzuntersuchung an einem prolaten Rotationskern

Variation des Produktes $B_2' C_2'$ bei einer Phononenzahl von 20

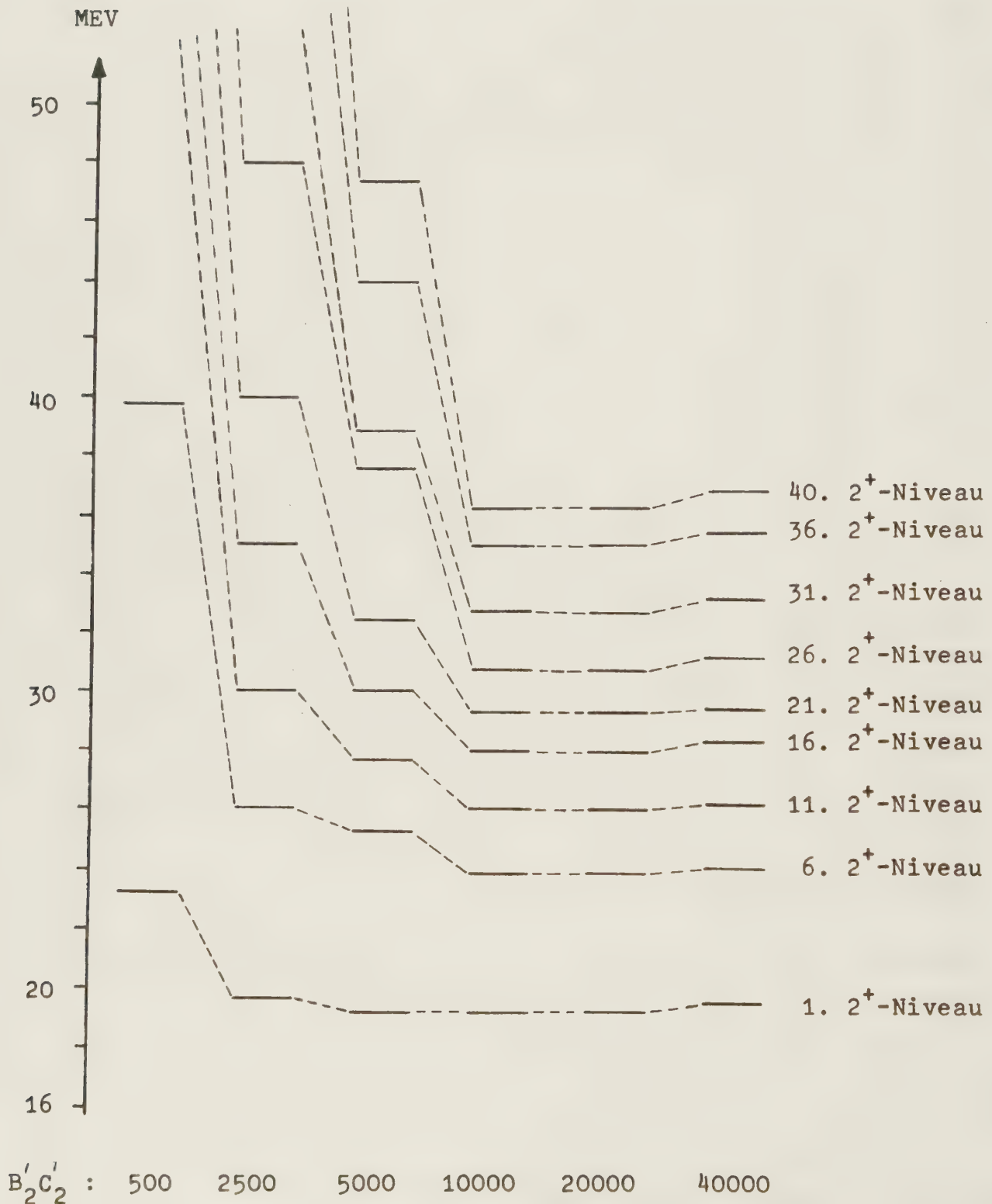


Fig.: 9

Konvergenzuntersuchung an einem asymmetrischen Kreisel

Variation des Produktes $B'_2 C'_2$ bei einer Phononenzahl von 20

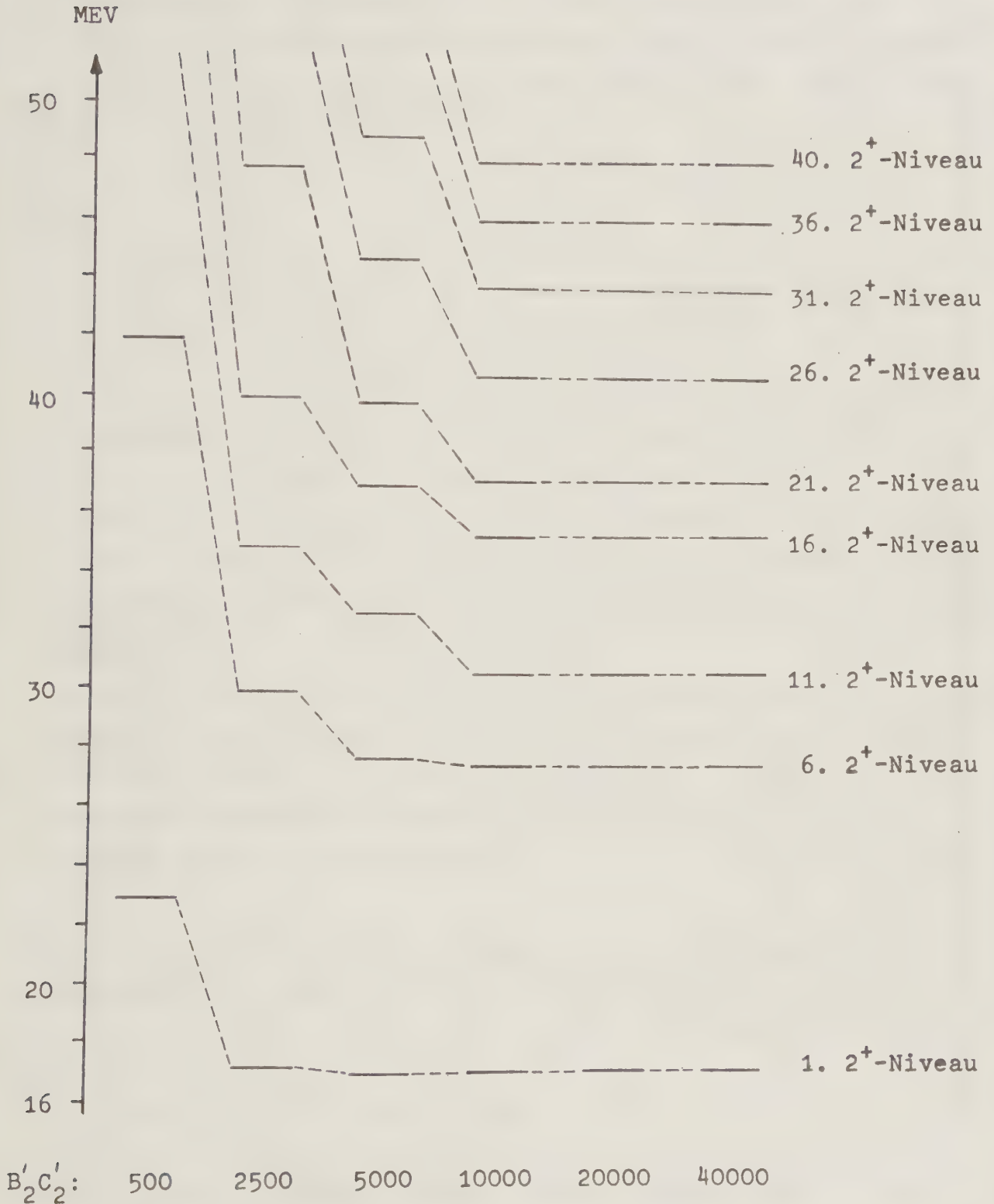


Fig.: 10

Konvergenzuntersuchung an einem Kern mit zwei Minima

Variation des Produktes $B_2' C_2'$ bei einer Phononenzahl von 20

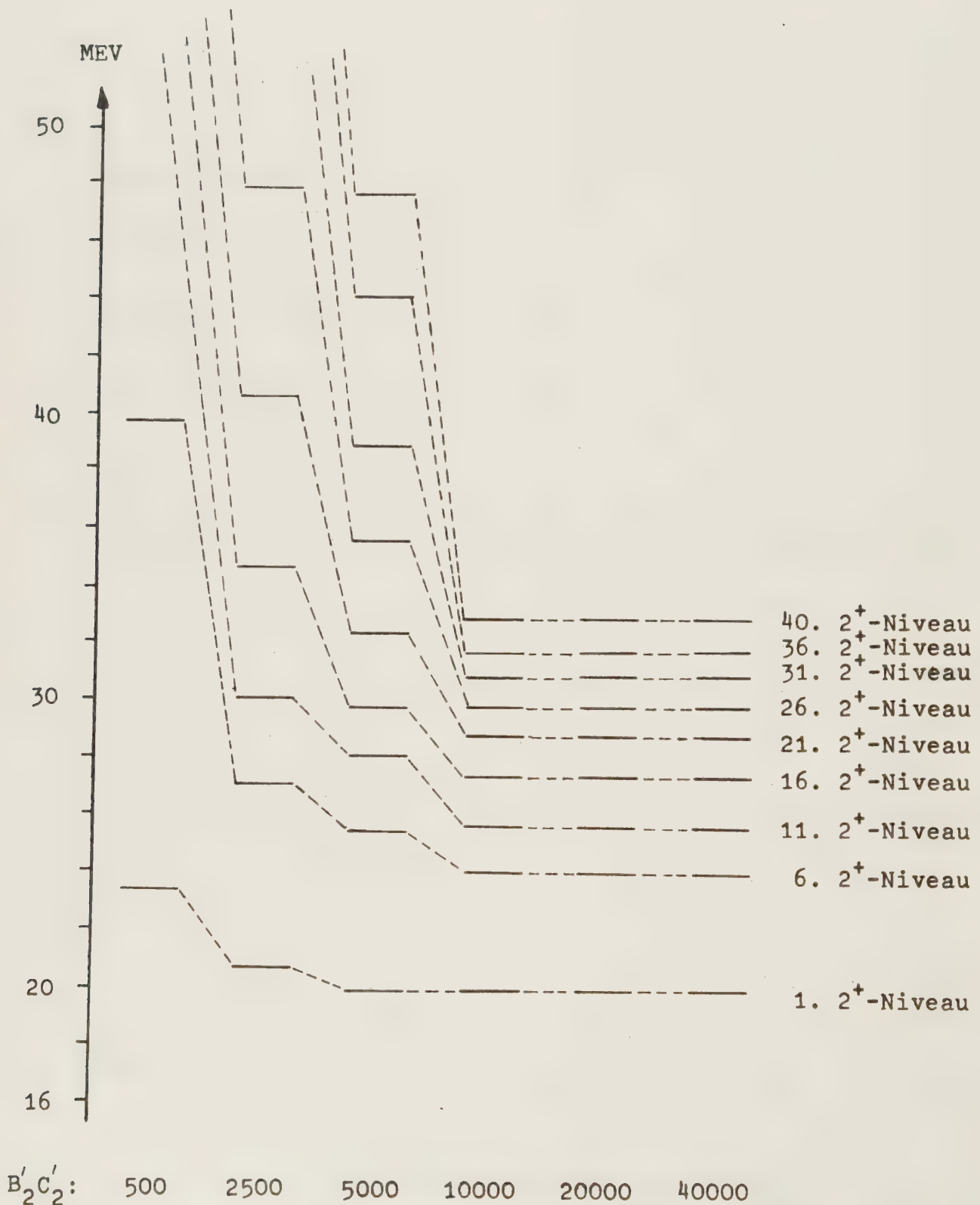


Fig.: 11

5.2. Schematische Studien

Photonukleare Prozesse können in zwei Gruppen unterteilt werden; die Photoabsorptionsprozesse und die Photostreuprozesse. Die analytische Darstellung dieser Kernprozesse wurde in den vorangegangenen Kapiteln vorgenommen.

Der totale Absorptionsquerschnitt ist:

$$\sigma^{\text{abs}} = \sigma(\gamma, n) + \sigma(\gamma, p) + \sigma(\gamma, pn) + \sigma(\gamma, 2p) + \sigma(\gamma, 2n) + \dots$$

wobei die Emission eines Protons auf Grund der Coulomb-Barriere selten ist, und der Beitrag, verglichen mit dem Gesamtwirkungsquerschnitt, kleiner als 10% ist⁸.

Bei den Photostreuprozessen zeigt sich, daß der Anteil der Quadrupolstreuung vernachlässigbar klein gegenüber der Dipolstreuung ist. Für alle berechneten Querschnitte wird deshalb nur der Anteil der Dipolstreuung dargestellt.

Das Ziel dieses Kapitels wird sein, schematische Studien an vier Kerntypen, einem anharmonischen Vibrator, einem prolaten und einem oblaten Rotationskern und einem asymmetrischen Kreis vorzunehmen, und die Gestalt der Absorptionskurven zu untersuchen.

In Fig. 12 ist die kollektive Potentialfläche (PES) eines anharmonischen Vibrators dargestellt. Darunter ist der Schnitt entlang der $\gamma = 0^\circ$ - und der $\gamma = 60^\circ$ -Achse zu sehen.

In Fig. 13 sind oben der γ -Absorptionsquerschnitt und darunter die γ -Streuquerschnitte für die E1-Resonanzen dargestellt.

Bei einem anharmonischen Kern, der fast Kugelgestalt hat, sind die Dipolschwingungen dieser Achsen etwa gleich groß. Im statischen Fall sind alle drei Dipolzustände entartet. Diese Entartung verursacht eine Überlappung der Zustände, die sich durch die Kopplung in mehrere Dipollinien aufspalten.

Die dominante Dipolstärke liegt bei 16.7 MeV.

In Fig. 14 ist der E2-Absorptionsquerschnitt abgebildet. Auch hier führt die Entartung der fünf Quadrupolzustände zu einer

Überlappung, auf Grund derer eine Aufspaltung der Quadrupolstärken stattfindet. Dem sphärischen Charakter gemäß zeigt sich ein dominanter Peak. Die zwei sehr dicht beieinanderliegenden Quadrupolstärken befinden sich bei 19.8 MeV.

In Fig. 15 ist der totale Wirkungsquerschnitt für Dipol- und Quadrupolschwingungen aufgetragen. Die gestrichelte Linie kennzeichnet den Verlauf des E1-Absorptionsquerschnittes ohne den E2-Anteil.

Die PES eines prolatischen Rotationskernes ist in Fig. 16 zu sehen. Darunter befindet sich in der gleichen Figur der Schnitt entlang der $\gamma = 0^\circ$ - und der $\gamma = 60^\circ$ -Achse.

In Fig. 17 sind der E1-Absorptionsquerschnitt und die E1-Streuquerschnitte abgebildet. Beim axialsymmetrischen Rotor sind die zwei Achsen senkrecht zur Symmetrieachse gleich, während die dritte Achse verschieden ist. Daher sind die beiden Dipolschwingungen senkrecht zur Symmetrieachse entartet. Sie schöpfen etwa $2/3$ der gesamten Dipolstärke aus. Der vorliegende zigarrenförmig deformierte Kern zeigt die entarteten Zustände bei höherer Energie als den dritten Zustand.

Da in die γ -Streuquerschnitte dieselben Matrixelemente eingehen wie in die γ -Absorptionsquerschnitte, liefern die erstgenannten die gleiche Information über die kollektiven Eigenschaften des Kernes wie die Absorptionsquerschnitte.

Die Fig. 18 zeigt den Quadrupolabsorptionsquerschnitt. Bei axialsymmetrischen Kernen sind die E2-Riesenresonanzen jeweils entlang zweier Schwingungsachsen entartet. Neben diesen beiden Peaks existiert ein dritter kleinerer, entsprechend dem nichtentarteten Schwingungszustand.

Bei prolatischen und oblaten Kernen liegt der eine entartete Peak bei der größten Energie, die in den hier gerechneten Kernen etwa 24 MeV beträgt.

Bei dem prolatischen Rotationskern liegt der andere entartete Zustand bei niedrigerer Energie als der nichtentartete; die dominanten Quadrupolstärken dazu befinden sich bei 18.9 MeV und 21.3 MeV.

In Fig.19 sind die E1- und die E2-Absorptionsquerschnitte zusammen aufgetragen. Die gestrichelte Kurve zeigt den Verlauf ohne die E2-Resonanzen.

In der PES der Fig. 20 handelt es sich um einen oblaten Rotationskern, mit einem Minimum auf der $\gamma = 60^\circ$ -Achse. In derselben Figur befindet sich der Schnitt entlang der $\gamma = 0^\circ$ - und der $\gamma = 60^\circ$ -Achse.

In der Absorptionskurve der E1-Riesenresonanzen, Fig.21, liegen die entarteten Zustände bei niedrigerer Energie als der nicht-entartete.

Die E2-Absorptionskurve in Fig. 22 hat bei der niedrigsten Energie einen kleinen Peak, gemäß den Schwingungen entlang der nichtentarteten Achse; bei größerer Energie zeigen sich zwei Peaks für die beiden Schwingungen entlang der entarteten Schwingungsachsen. Die dominanten Quadrupolstärken liegen bei 19.3 MeV, 21.4 MeV und 24.5 MeV.

In der Fig. 23 sind die addierten Absorptionsquerschnitte der E1- und der E2-Resonanz dargestellt.

Als letzten Kern in diesem Kapitel zeigt Fig. 24 einen asymmetrischen Kreisel. In der PES liegt das Minimum bei $\gamma = 36^\circ$. In derselben Figur ist ein Schnitt entlang der $\gamma = 30^\circ$ - und der $\gamma = 0^\circ$ -Achse dargestellt.

Der E1-Absorptionsquerschnitt und die E1-Streuquerschnitte sind in Fig. 25 dargestellt. Hier ist die Entartung entlang der Schwingungsachsen aufgehoben, und es zeigen sich drei Peaks. Die gleiche Struktur läßt sich im elastischen Streuquerschnitt sehen.

Die Entartung der E2-Schwingungen ist ebenfalls aufgehoben. Es zeigen sich in Fig 26 fünf Peaks. Die Quadrupolstärken dazu liegen bei 20.3 MeV, (21.3, 21.8 MeV), 22.9 MeV, (25.3, 25.8 MeV), 28.8 MeV. Daneben sind etliche Vibrationssatelliten zu sehen.

In Fig. 27 sind die addierten E1- und E2-Absorptionsquerschnitte dargestellt. Die gestrichelte Linie zeigt den Verlauf der E1-Riesenresonanzen.

Die Breiten der E1-Riesenresonanzen wurden mit 2.5 MeV und die Breiten der E2-Resonanzen mit 0.9 MeV angesetzt.

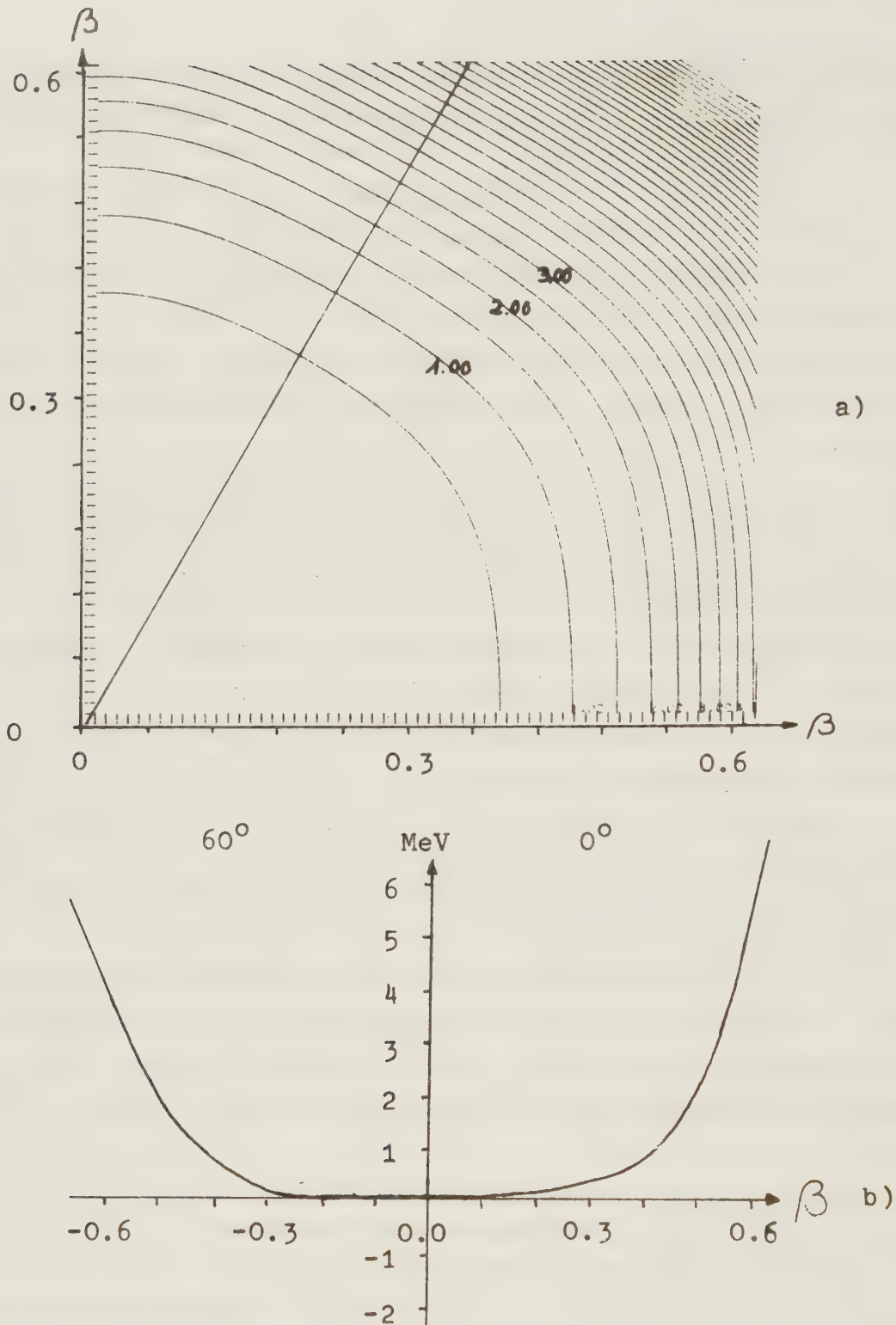


Fig.12

Fig. 12a PES eines anharmonischen Vibrators

Fig. 12b Querschnitt entlang der $\gamma = 0^\circ$ und der $\gamma = 60^\circ$ -Achse

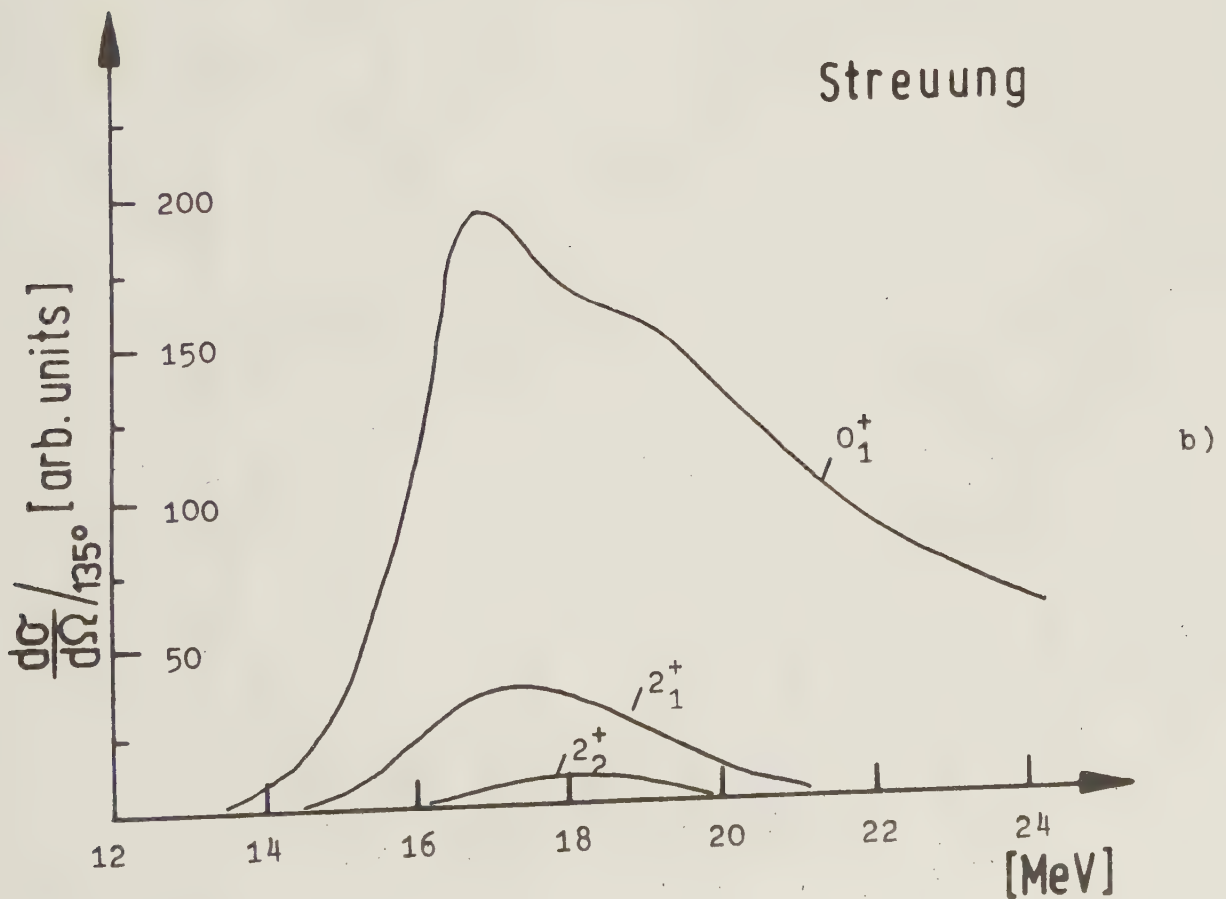
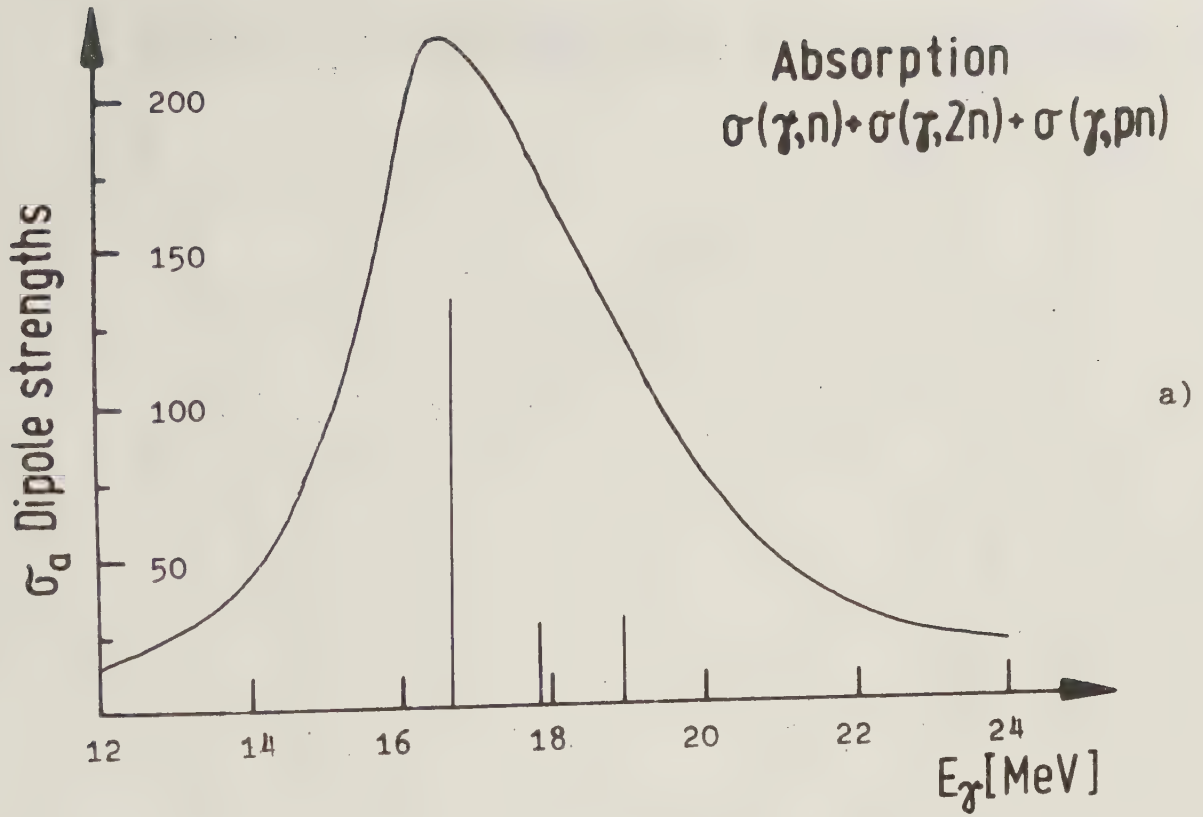


Fig. 13a E1-Absorptionsquerschnitt

Fig. 13b E1-Streuquerschnitte

Fig. 13

E2- Absorptionsquerschnitt eines anharmonischen Vibrators



Fig. 14

E1- und E2- Absorptionsquerschnitt eines anharmonischen
Vibrators

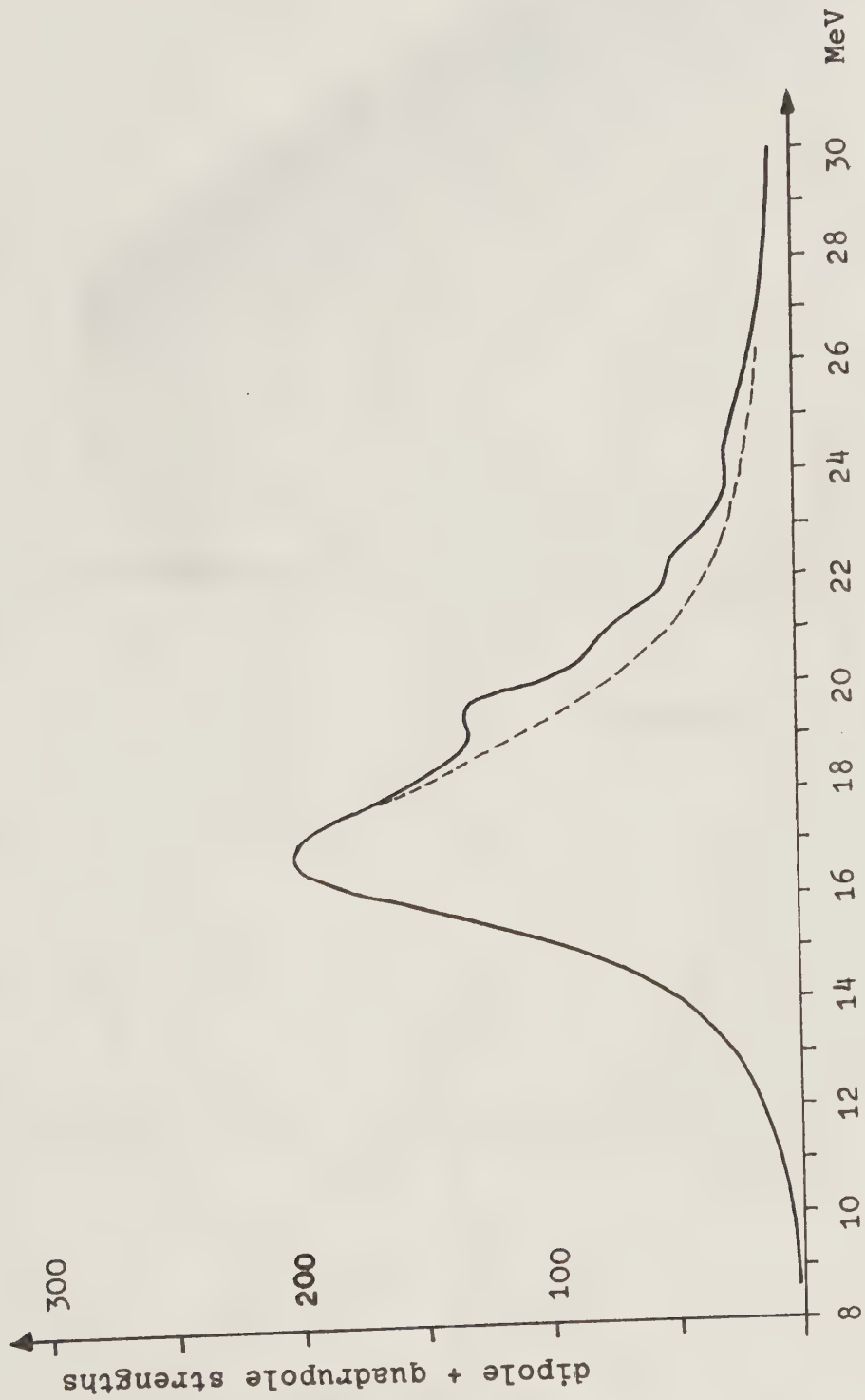


Fig. 15

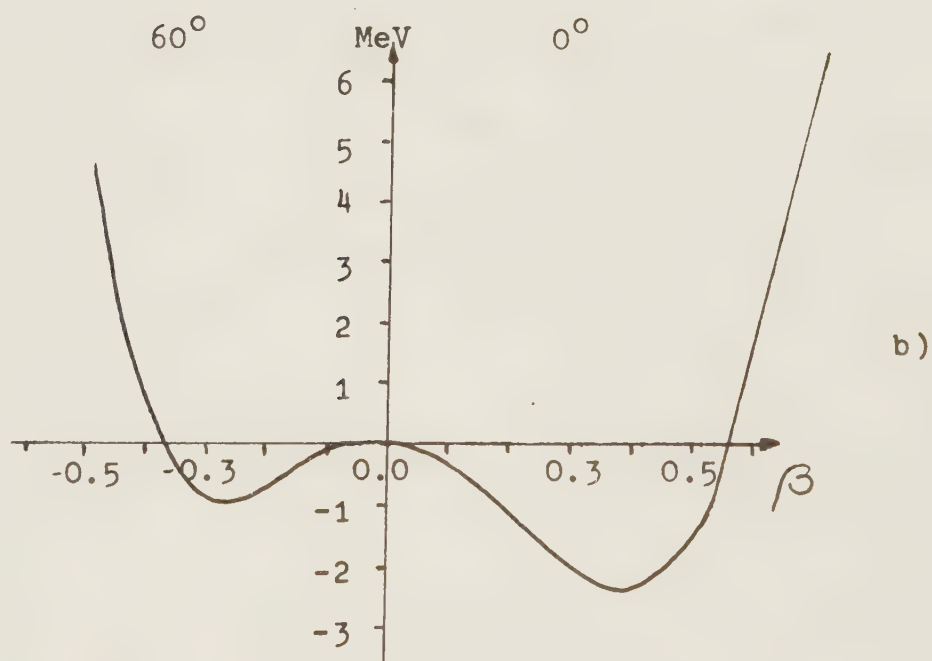
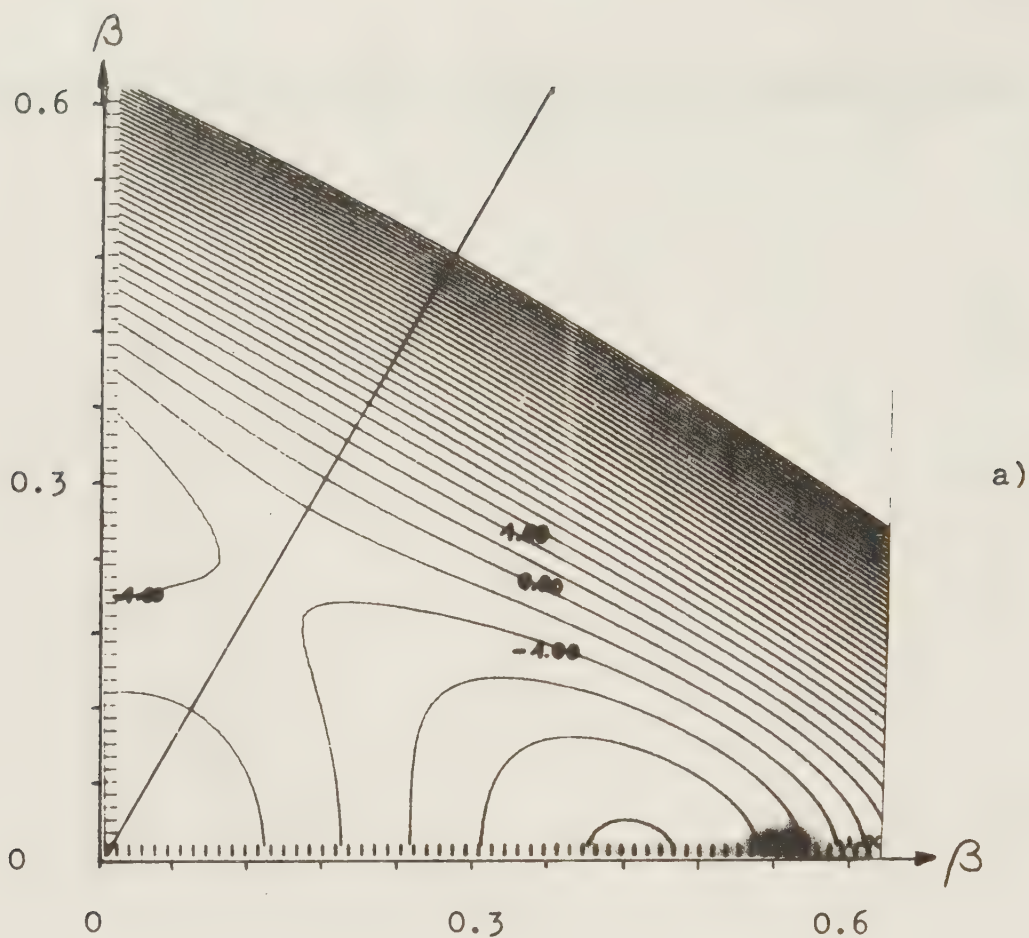


Fig. 16

Fig. 16a PES eines prolaten Rotationskern

Fig. 16b Querschnitt entlang der $\gamma=0^\circ$ - und der $\gamma=60^\circ$ -Achse

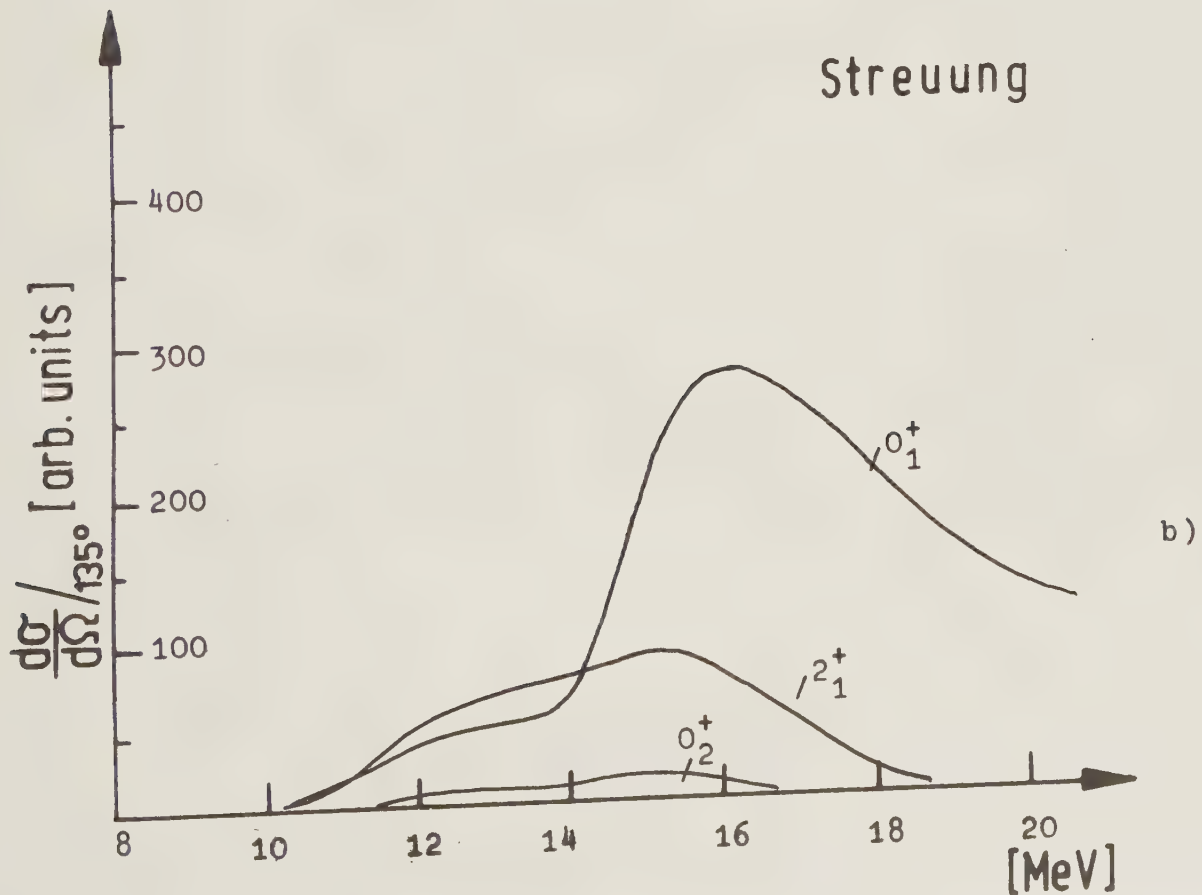
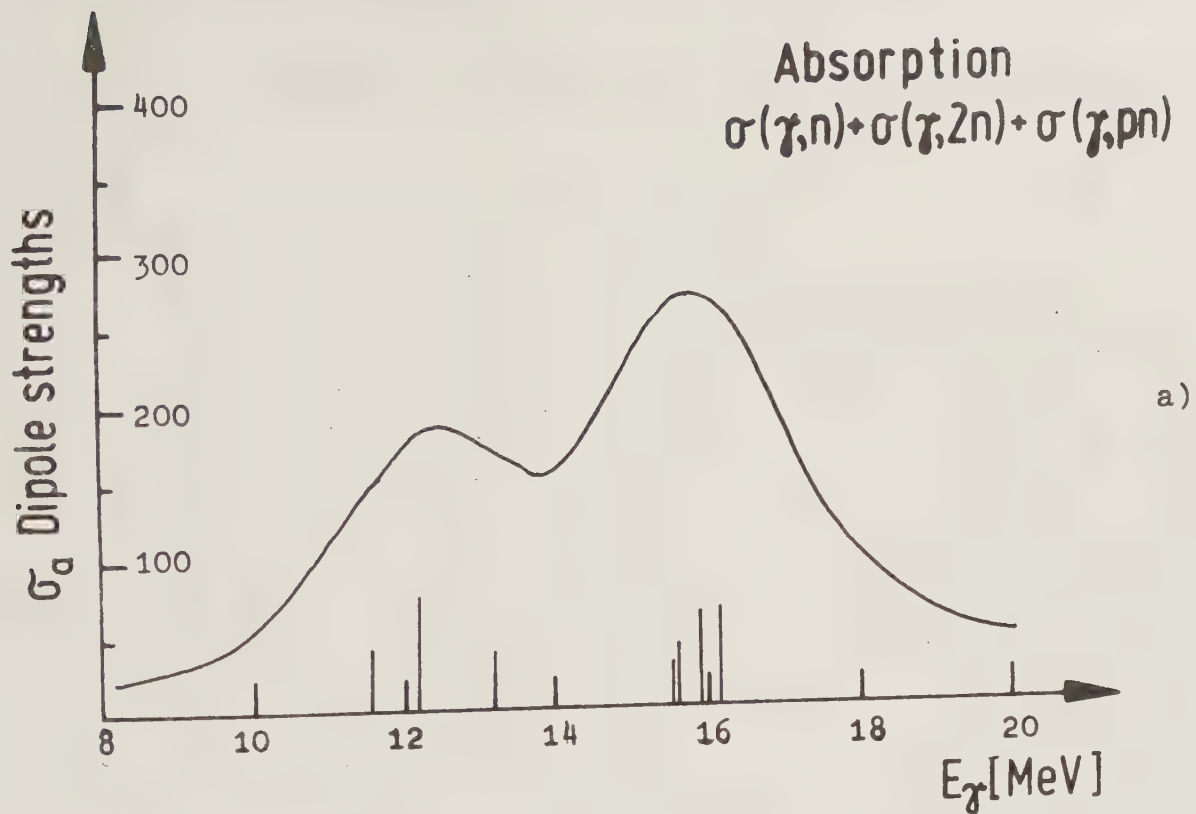


Fig. 17a E1-Absorptionsquerschnitt

Fig. 17b E1-Streuquerschnitte

Fig. 17

E2- Absorptionsquerschnitt eines prolaten Rotators

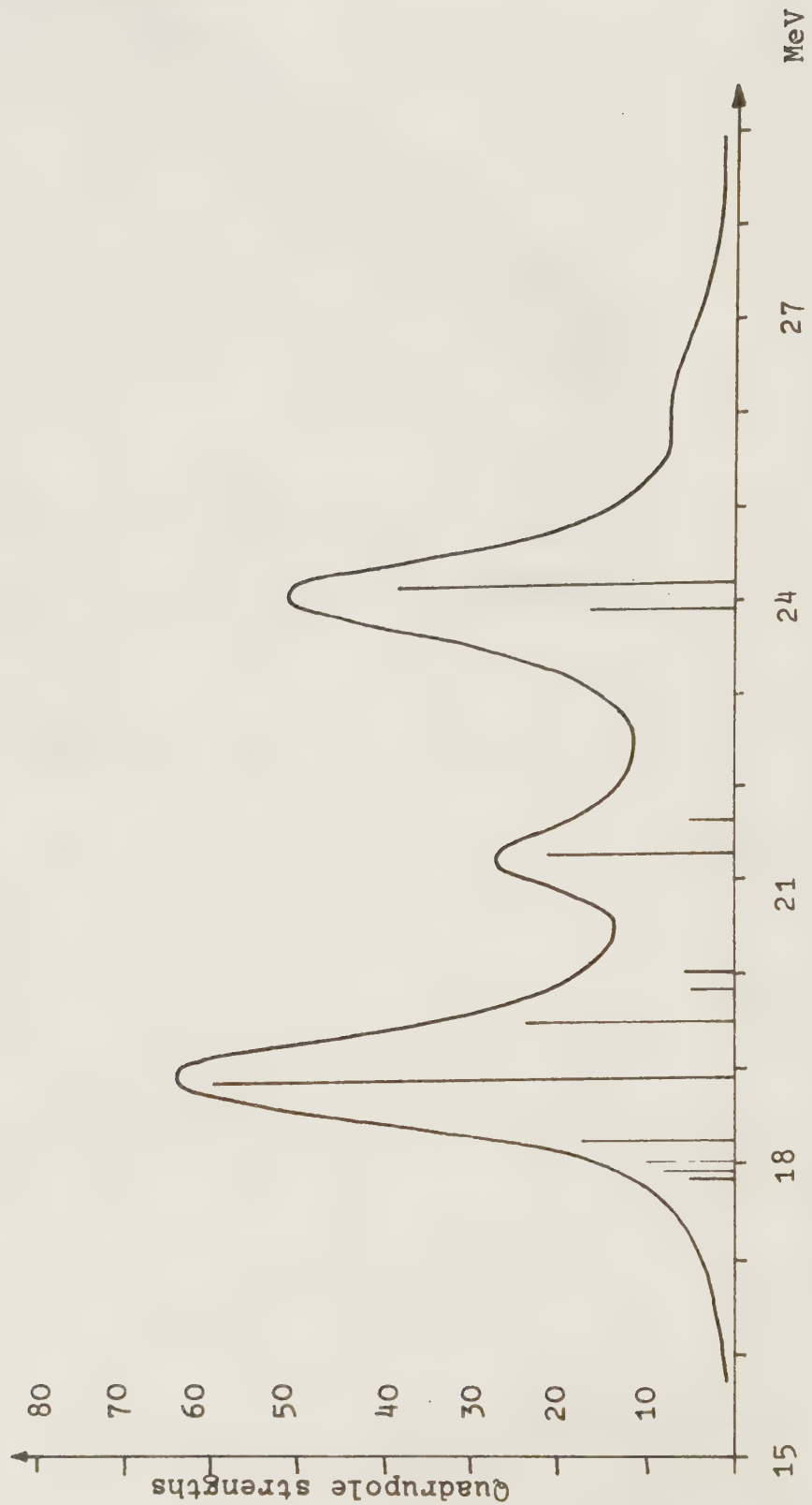


Fig. 18

E1- und E2-Absorptionsquerschnitt eines prolaten Rotators

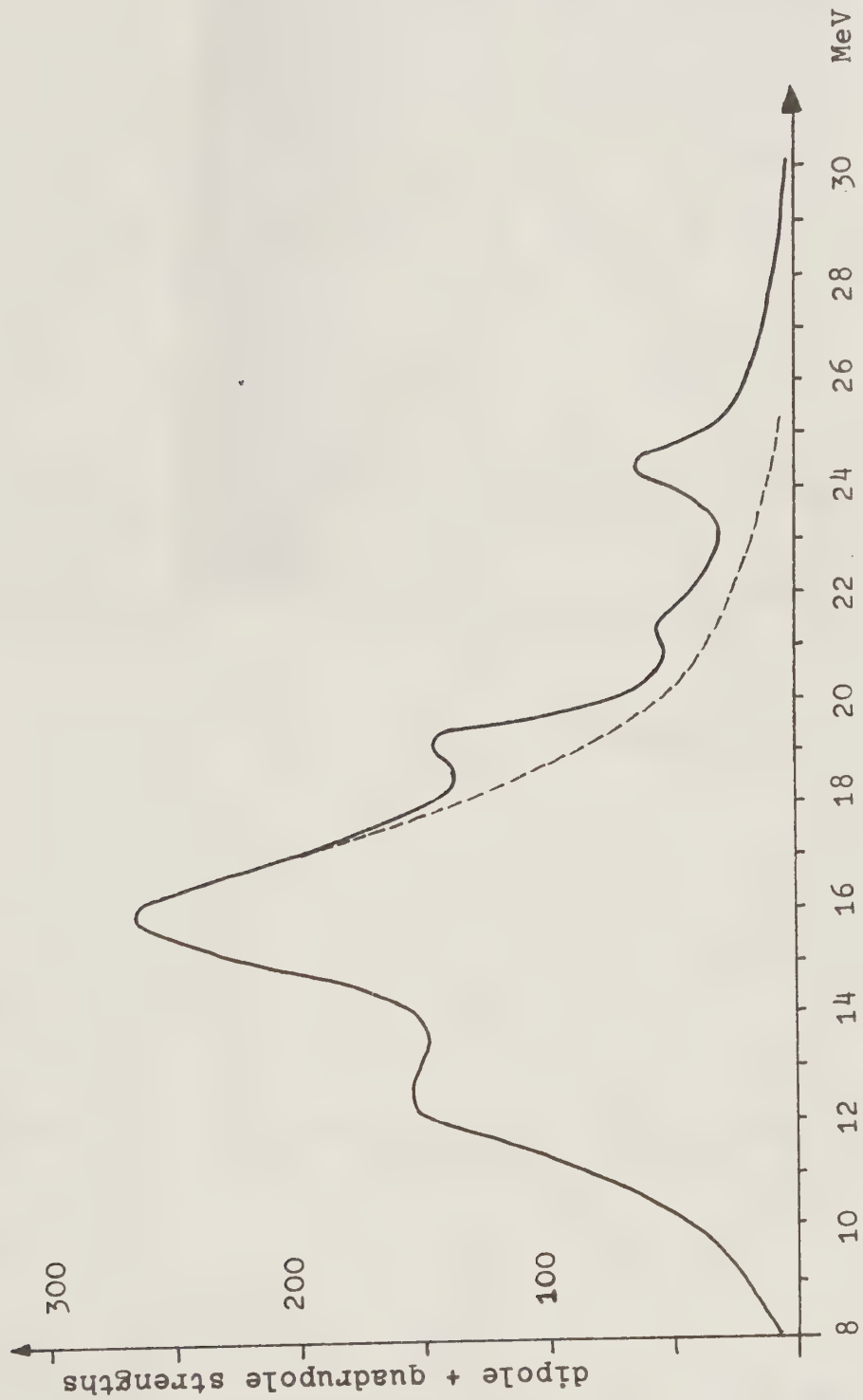


Fig. 19

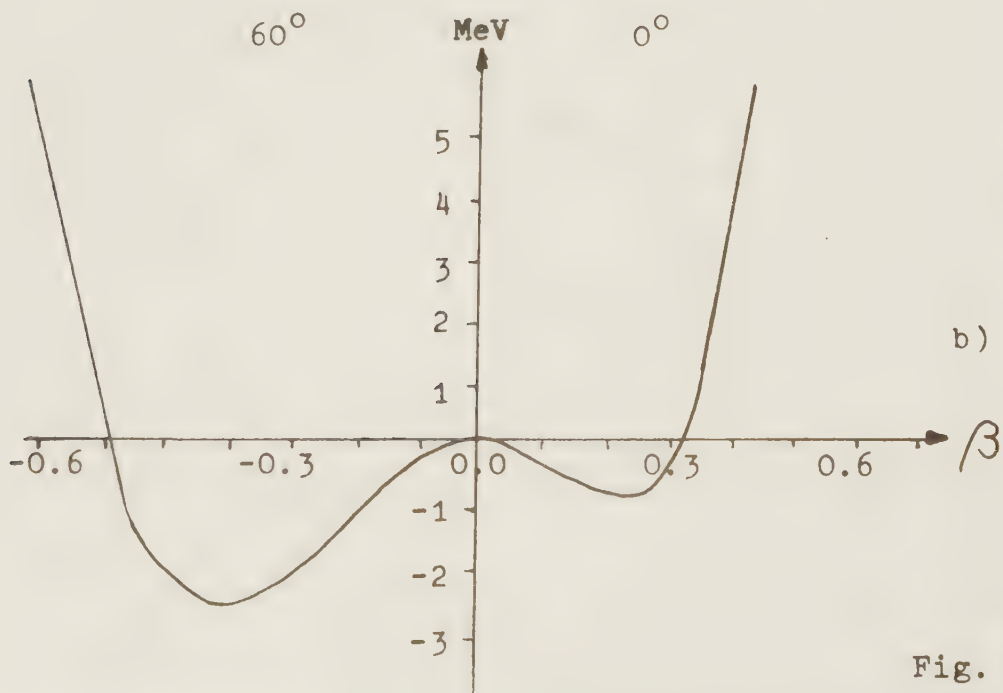
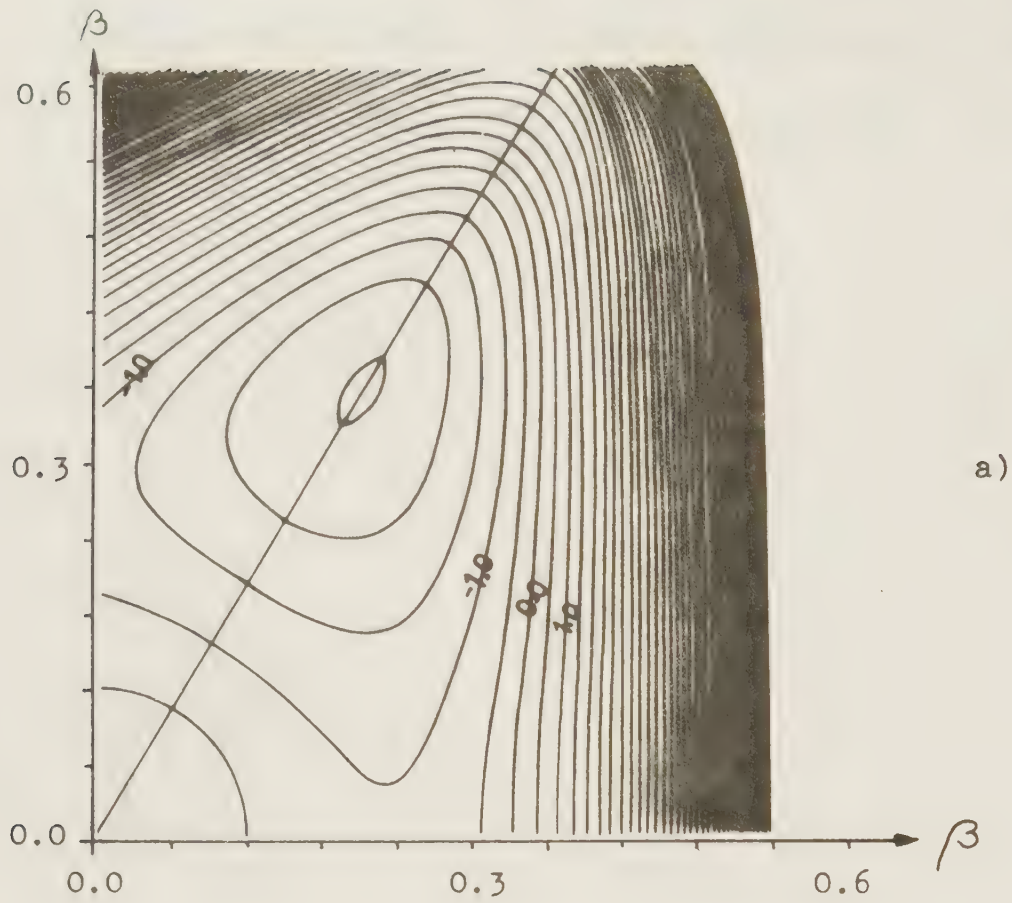


Fig. 20

Fig. 20a PES eines oblaten Rotationskerns

Fig. 20b Querschnitt entlang der $\gamma=0^\circ$ - und der $\gamma=60^\circ$ -Achse

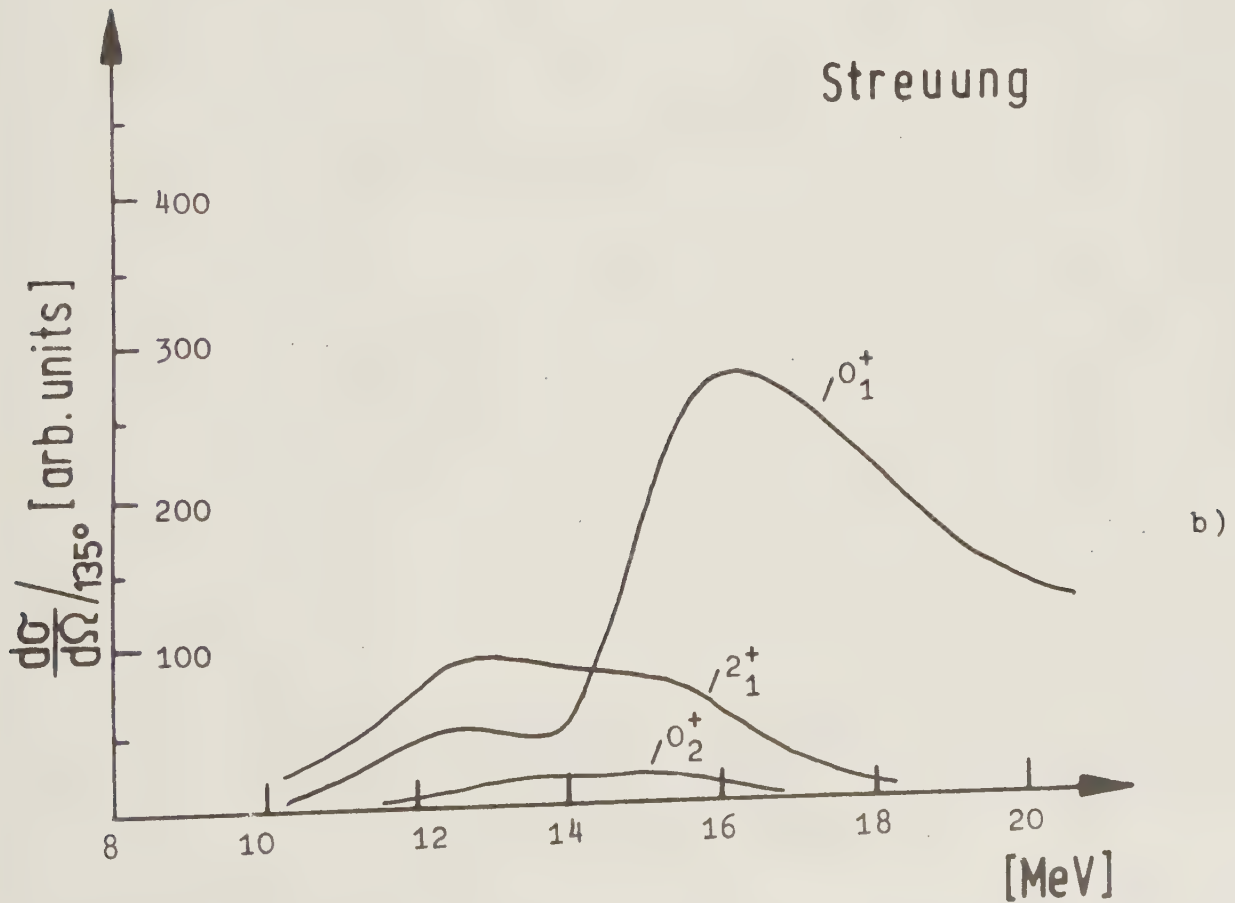
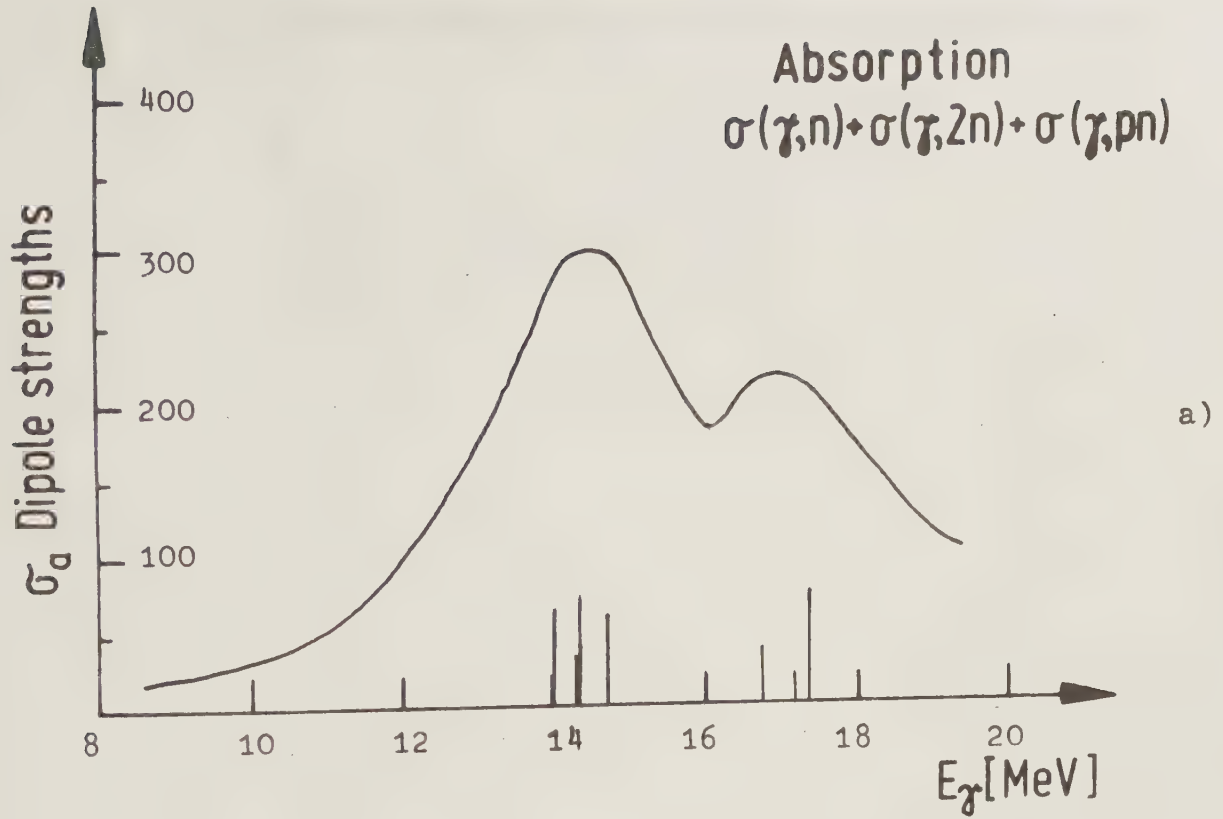


Fig. 21a E1-Absorptionsquerschnitt

Fig. 21b E1-Streuquerschnitte

Fig.21

E2- Absorptionsquerschnitt eines oblaten Rotators

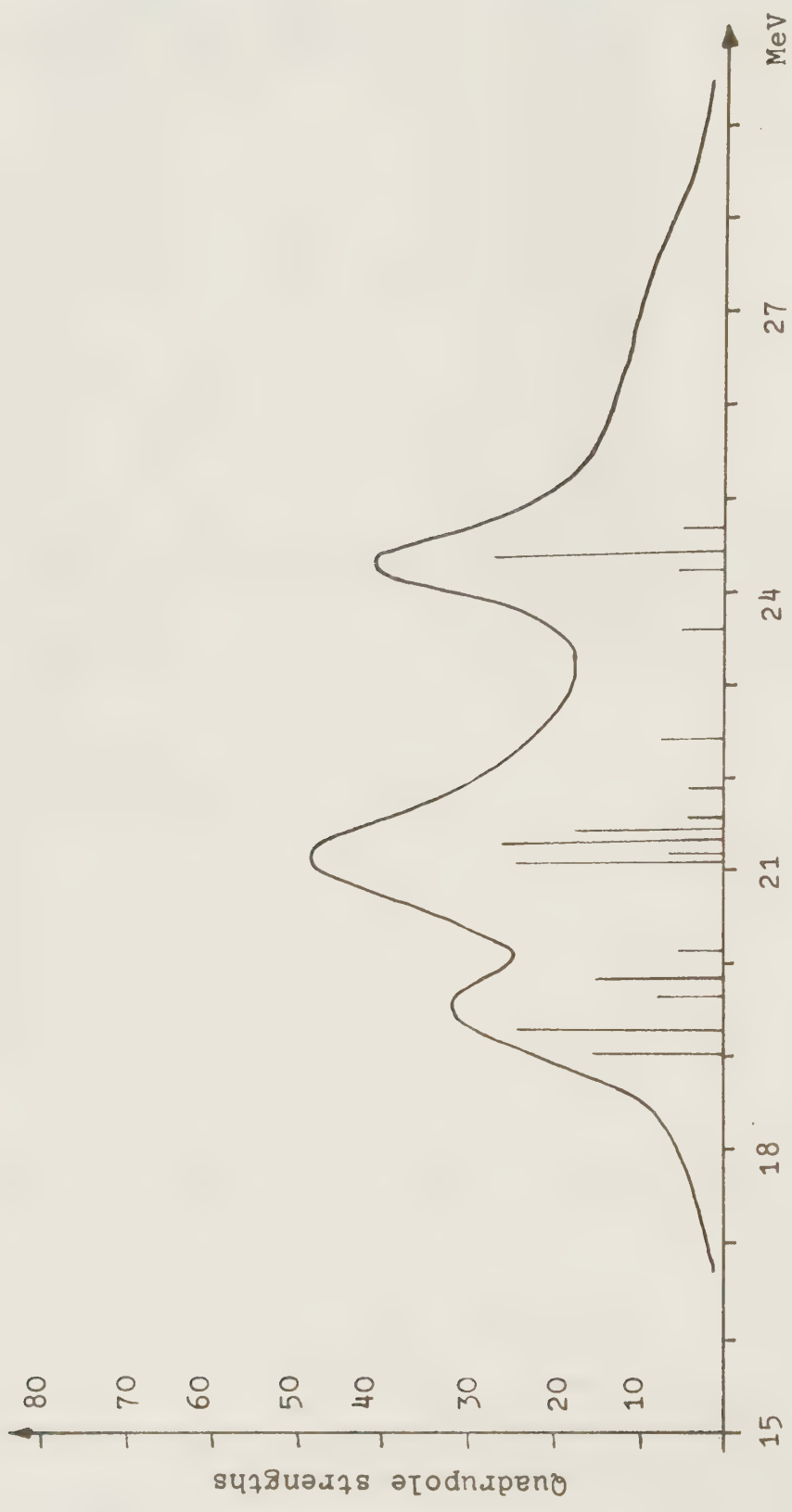


Fig. 22

E1- und E2-Absorptionsquerschnitt eines oblaten Rotators

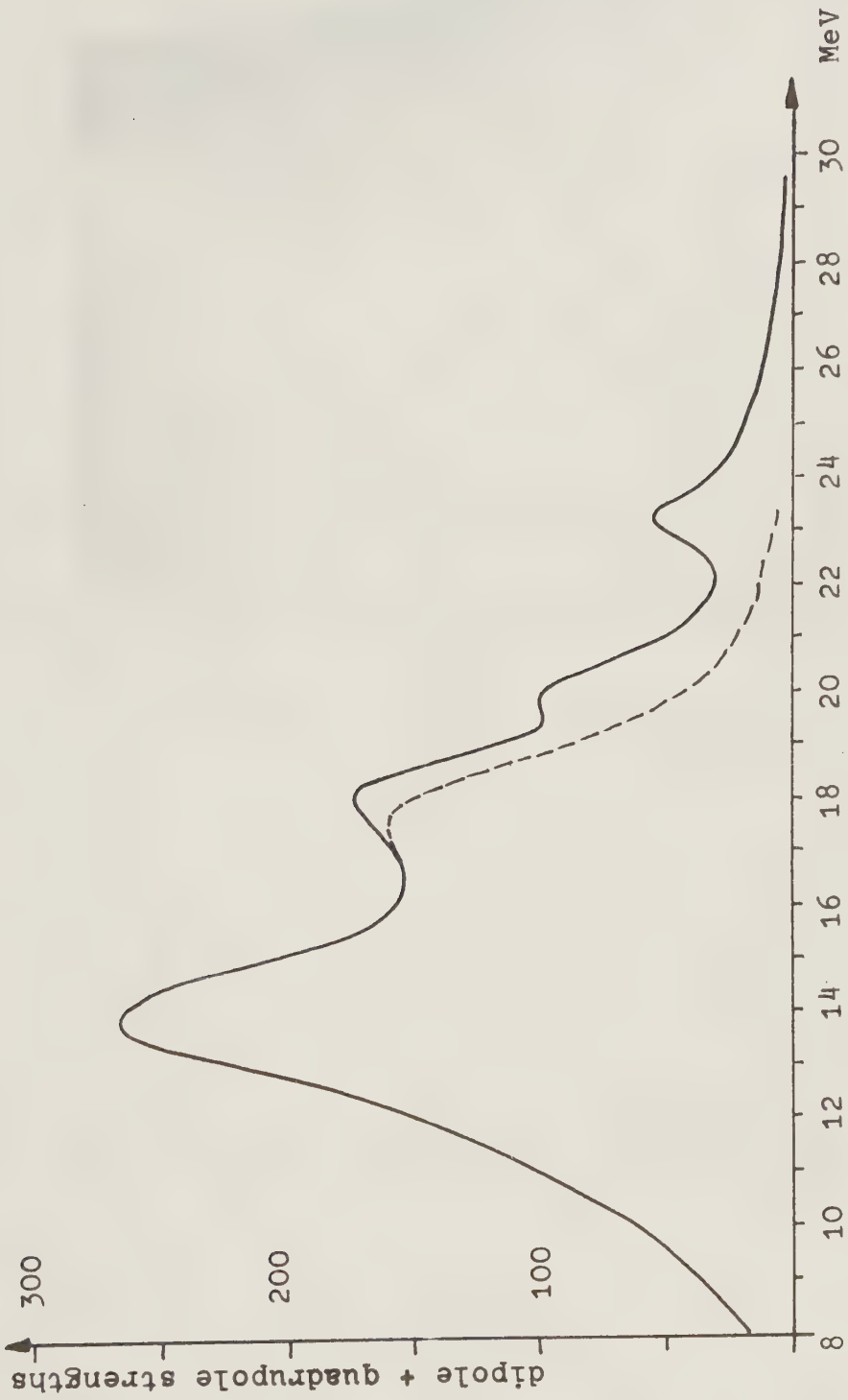


Fig. 23

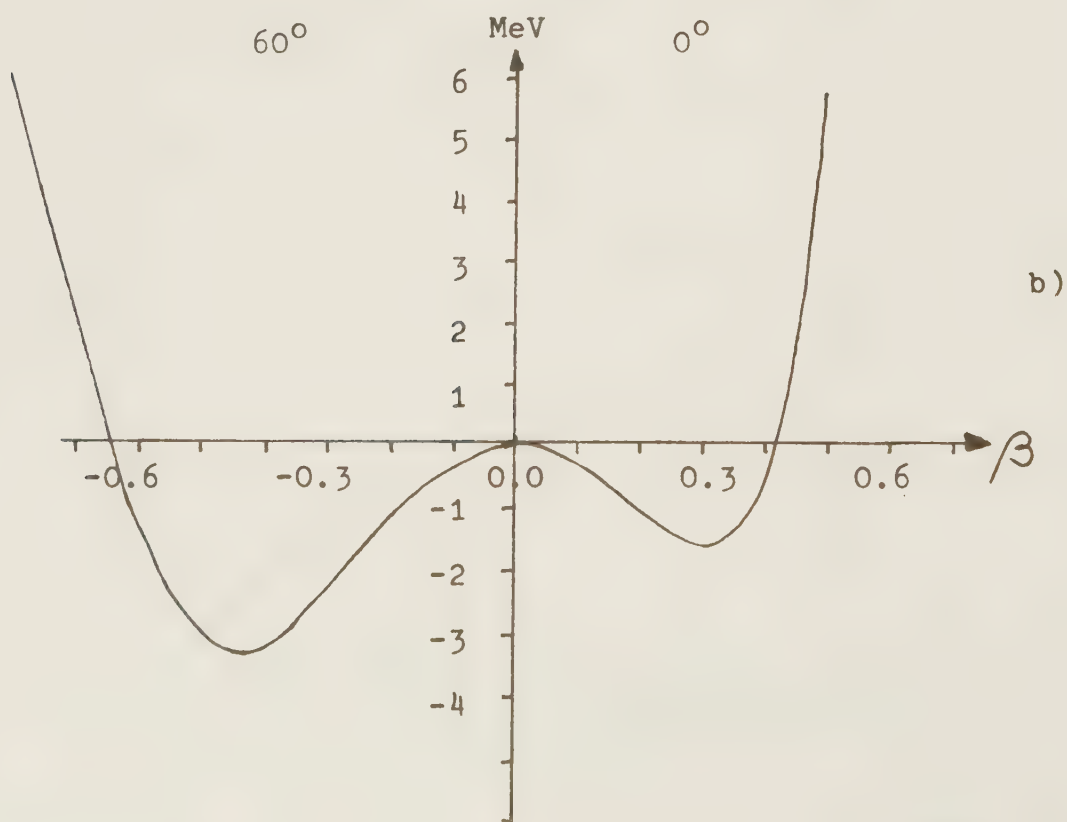
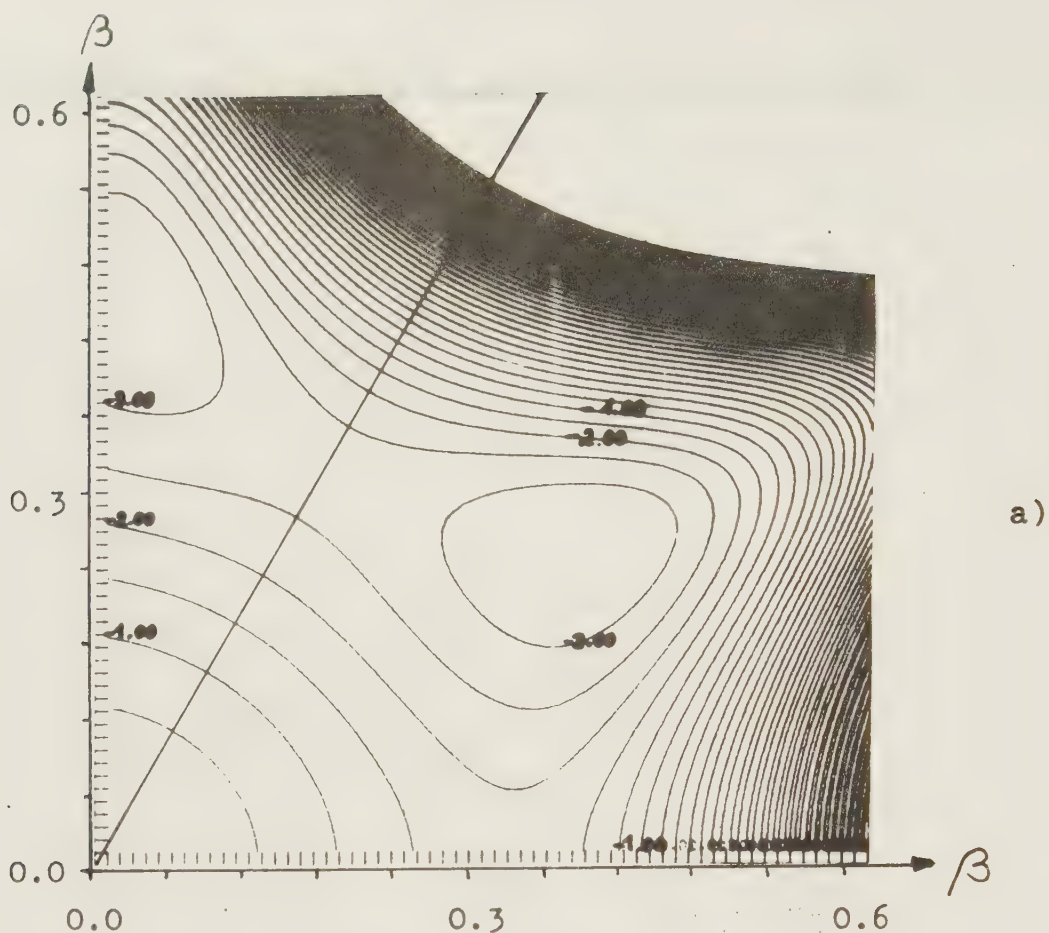


Fig. 24

Fig. 24a PES eines asymmetrischen Kreisels

Fig. 24b Querschnitt entlang der $\gamma=0^\circ$ - und der $\gamma=60^\circ$ -Achse

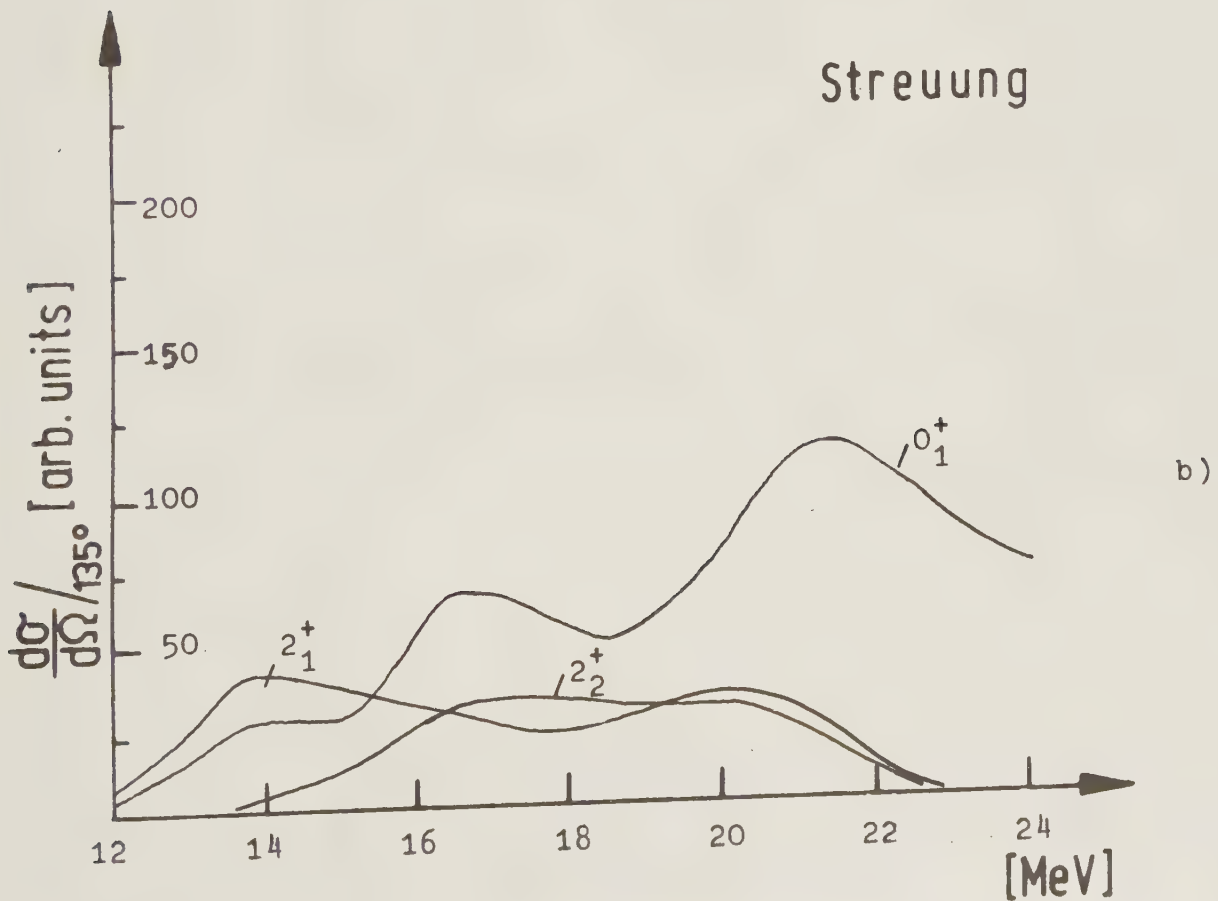
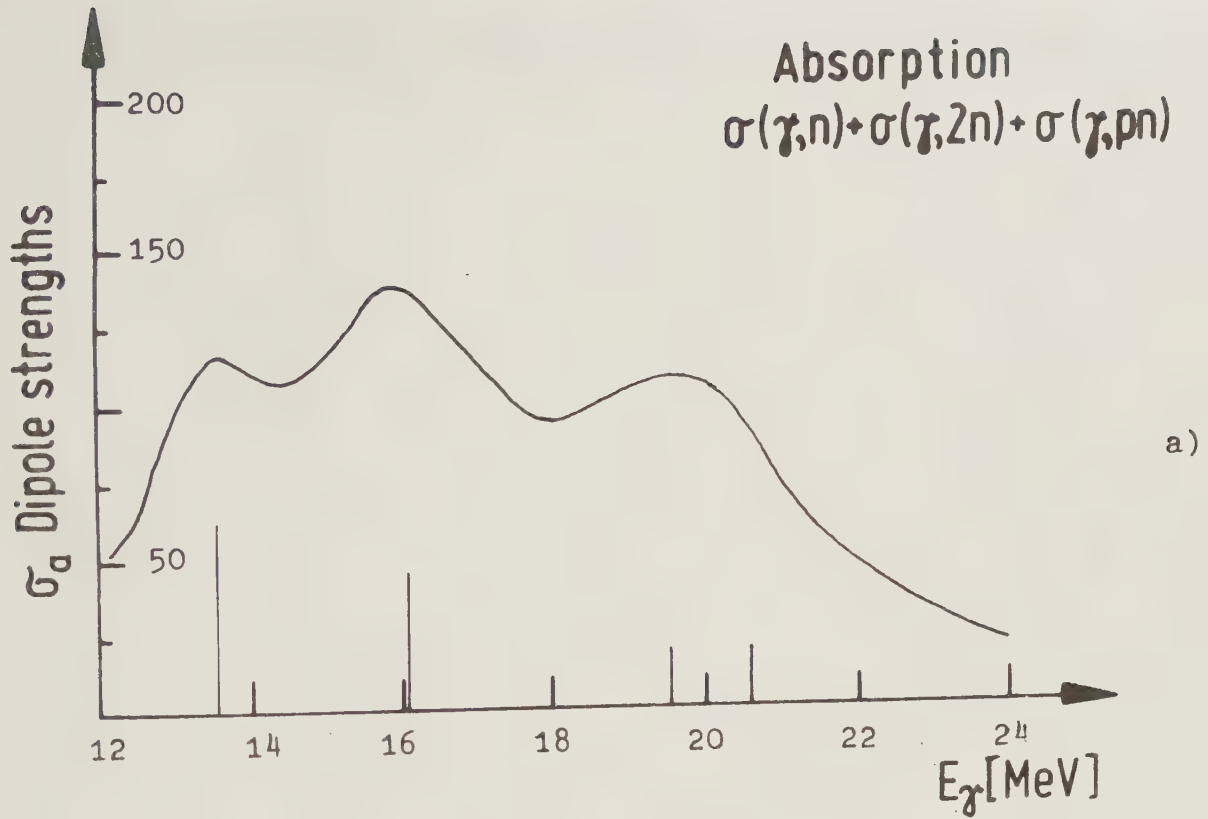


Fig. 25a E1-Absorptionsquerschnitt

Fig. 25b E1-Streuquerschnitte

E2- Absorptionsquerschnitt eines asymmetrischen Kreisels

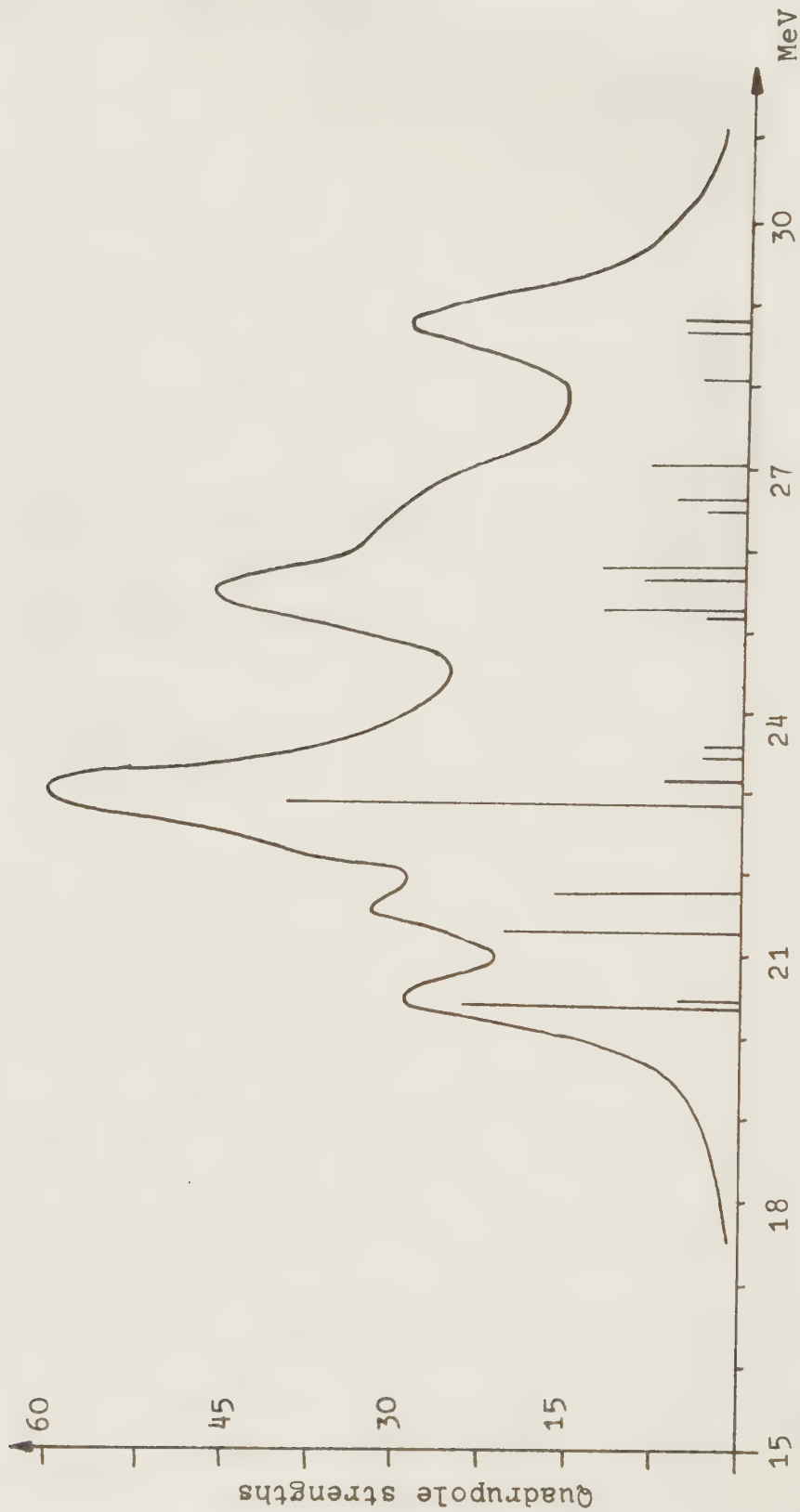


Fig. 26

E1- und E2- Absorptionsquerschnitt eines asymmetrischen Kreisels

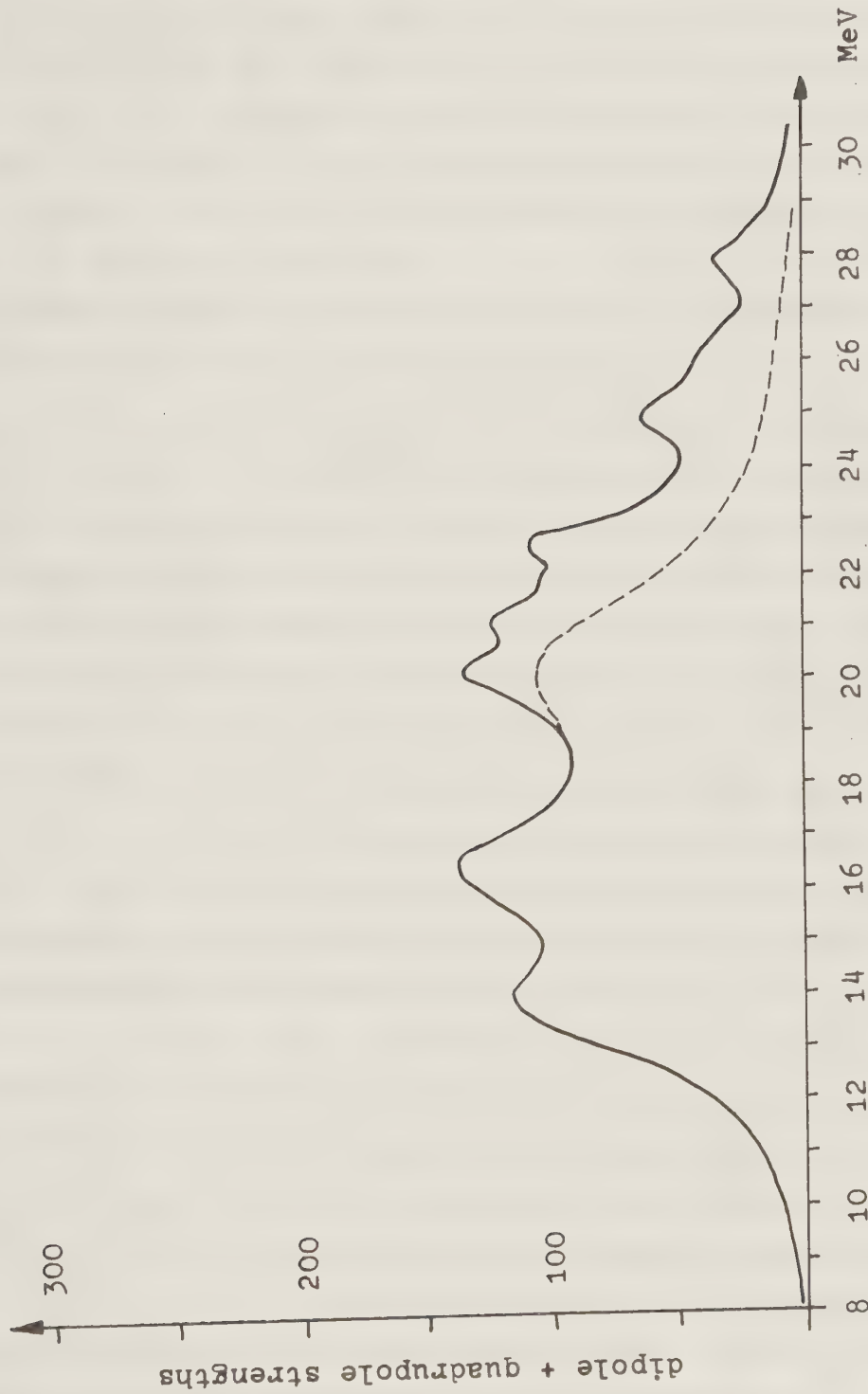


Fig. 27

5.3. Übergang vom anharmonischen Vibrator zum symmetrischen Rotator am Beispiel der Nd-Isotope und der Sm-Isotope

In diesem Kapitel soll untersucht werden, wie sich die E2-Absorptionsquerschnitte beim Übergang von einem sphärischen zu einem prolat deformierten Kern ändern.

5.3.1. Die Nd-Isotopenreihe

In den Figuren 28 und 29 sind die PES der Nd-Isotope abgebildet. Neben den PES sind die entsprechenden Querschnitte entlang der $\gamma=0^\circ$ - und der $\gamma=60^\circ$ -Achse dargestellt.

In der Reihe zeigt sich ein Übergang von einem Rotationskern über Kerne mit sphärischem Grundzustand und einem zweiten Minimum auf der prolaten Achse zu Rotationskernen, bei denen das prolate Minimum in den Bereich größerer Deformation wandert. Dies ist die erste Reihe eines Übergangsbereiches innerhalb des Periodensystems der gg-Kerne, in dem eine deutliche Entwicklung von einem sphärischen zu einem deformierten Grundzustand vorliegt. Die Parameter für die Berechnung des Niederenergiehamiltonoperators wurden der Arbeit von Sedlmayr¹⁶ entnommen.

¹³⁸Nd ist ein Rotationskern mit einem sehr steilen Potentialtopf. Bei dem E1-Absorptionsquerschnitt in Fig. 30a ($T_D = 3$ MeV) zeigt sich in einer dominanten Dipolstärke der überwiegende Einfluß der β -Freiheitsgrade. Nur der elastische Streuquerschnitt (Fig. 30b) liefert einen Beitrag.

Diese Steifheit des Kerns zeigt sich ebenso im E2-Absorptionsquerschnitt in der einen dominanten Quadrupolstärke ($T_Q = 1.2$ MeV) in der Fig. 31a). Eine kleinere Linie befindet sich bei 22.4 MeV. Die Fig. 31b gibt den Verlauf der E1- und der E2-Absorptionsquerschnitte wieder, wobei die gestrichelte Linie den E1-Verlauf kennzeichnet.

Die Fig. 32 zeigt den E1-Absorptions- und die E1-Streuquerschnitte von ¹⁴²Nd. Dieser Kern hat einen sphärischen Grundzustand und ein energetisch höherliegendes zweites prolates Minimum.

Der E1-Absorptionsquerschnitt ($T_D = 3$ MeV) zeigt eine dominante Dipolstärke, wie man es für einen sphärischen Kern erwarten würde. Die Riesenresonanz 'sieht' also nur den sphärischen Grundzustand.

In Fig. 33a ist der E2-Absorptionsquerschnitt ($T_Q = 1.2$ MeV) dargestellt. Hier zeigt die Aufspaltung in viele Quadrupolstärken die Überlappung der einzelnen Schwingungszustände, hervorgerufen durch die Entartung der Schwingungsachsen. Diese Aufspaltung ist typisch für einen anharmonischen Vibrator.

Die Fig. 33b zeigt die addierten E1- und E2-Absorptionsquerschnitte, wobei die gestrichelte Linie den Verlauf der E1-Resonanz angibt.

In der PES von ^{144}Nd ist das sphärische Minimum geblieben, das zweite Minimum auf der prolaten Achse in Richtung kleinerer Deformation gewandert. Die Energiedifferenz zwischen den beiden Minima ist geringer geworden, so daß man bei den Riesenresonanzen eine stärkere Wechselwirkung, und demgemäß eine Aufspaltung in mehrere Dipol- bzw. Quadrupolstärken erwarten würde. Diese Aufspaltung zeigt sich sowohl in dem E1-Querschnitt in der Fig. 34a ($T_D = 3$ MeV), als auch dem E2-Absorptionsquerschnitt in der Fig. 35a ($T_Q = 1.2$ MeV).

Den wachsenden Einfluß der γ -Freiheitsgrade zeigt ebenso der einsetzende inelastische 2_1^+ -Streuquerschnitt in der Fig. 34b. In der Fig. 35b ist der addierte E1- und der E2-Absorptionsquerschnitt dargestellt, wobei der E1-Verlauf durch die gestrichelte Linie gekennzeichnet ist.

^{146}Nd ist ein flacher Rotationskern, der weich in γ -Richtung ist. Diese Tendenz zum Asymmetrischen ist durch ein beginnendes Aufbrechen der Entartung bezüglich der Schwingungsachsen verursacht. In den Absorptionskurven zeigt sich demgemäß eine Aufspaltung in drei dominante Dipolstärken ($T_D = 2.5$ MeV) in Fig. 36a und in fünf dominante Quadrupolstärken ($T_Q = 1.2$ MeV) in Fig. 37a. Bei den inelastischen 2^+ -Streuquerschnitten liefern beide Niveaus (2_1^+ und 2_2^+) einen Beitrag (Fig. 36b). In Fig. 37b sind die E1- und die E2-Absorptionsquerschnitte addiert dargestellt.

Das prolate Minimum ist in der PES von ^{148}Nd gegenüber ^{146}Nd zu

größerer Deformation gewandert. In γ -Richtung ist der Kern steifer geworden.

Der E2-Absorptionsquerschnitt in Fig 39a ($T_Q = 0.9$ MeV) zeigt drei dominante Peaks, typisch für einen symmetrischen Rotator, wobei der erste Peak größer als der zweite ist, was auf den prolaten Charakter hinweist (Bei oblaten Kernen ist das Verhältnis umgekehrt.). Die Fig. 39b zeigt die addierten Dipol- und Quadrupolabsorptionsquerschnitte.

In Fig. 38 sind der E1-Absorptions- und die E1-Streuquerschnitte dargestellt.

In der PES von ^{150}Nd ist das prolate Minimum zu noch größerer Deformation gewandert, und der Topf ist breiter geworden, was bei den Riesenresonanzen auf stärkere Wechselwirkung zwischen den verschiedenen Freiheitsgraden hinweist.

Tatsächlich ist eine starke Aufspaltung der Dipol- bzw. Quadrupolstärken zu sehen. Fig. 40 zeigt den E1-Absorptionsquerschnitt und die E1-Streuquerschnitte. Typisch für einen prolaten Kern ist die Aufspaltung in zwei Peaks, gemäß den Schwingungen entlang der nichtentarteten Achse (kleiner Peak) und den entarteten Schwingungen senkrecht zur Symmetrieachse (großer Peak).

Der inelastische 2_1^+ -Streuquerschnitt (Fig. 40b) liegt bei niedriger Energie über dem elastischen Anteil.

Im E2-Absorptionsquerschnitt (Fig. 41a) sind drei Peaks zu sehen. Auf Grund der oben beschriebenen Wechselwirkung spalten die Quadrupolstärken in viele Linien auf.

Fig. 41b zeigt die addierten E1- und E2-Absorptionsquerschnitte, wobei die gestrichelte Linie den Verlauf der E1-Resonanz angibt.

Die Breite der E1-Absorptionskurve wurde mit $T_D = 2.5$ MeV und die der E2-Kurve mit $T_Q = 0.9$ MeV angesetzt.

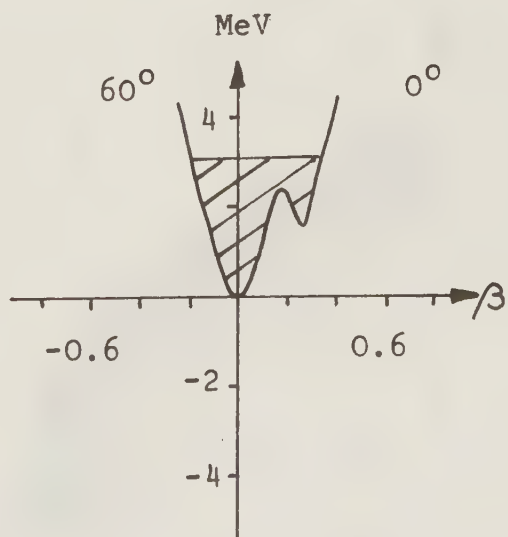
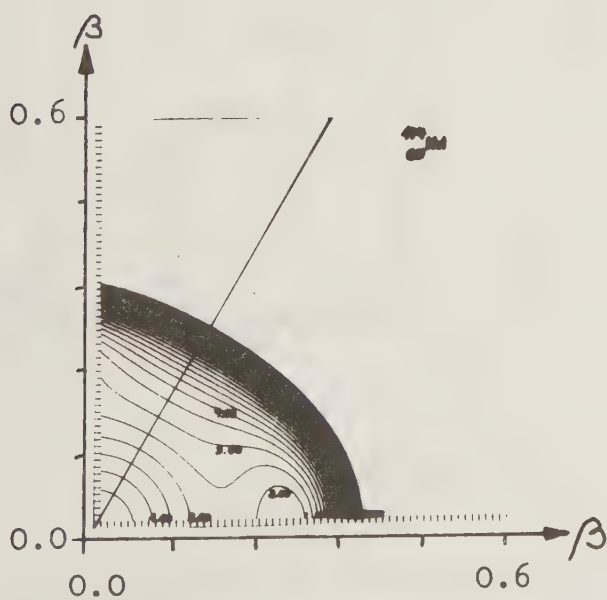
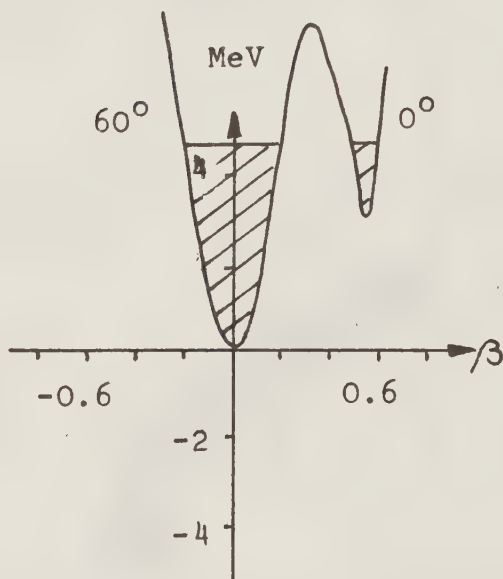
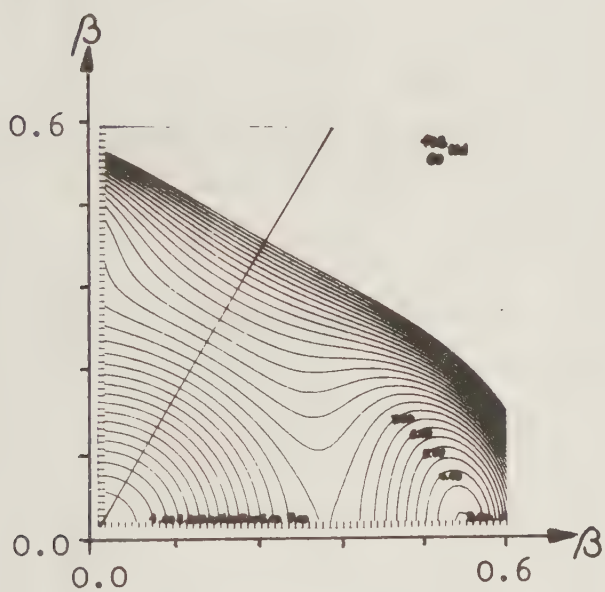
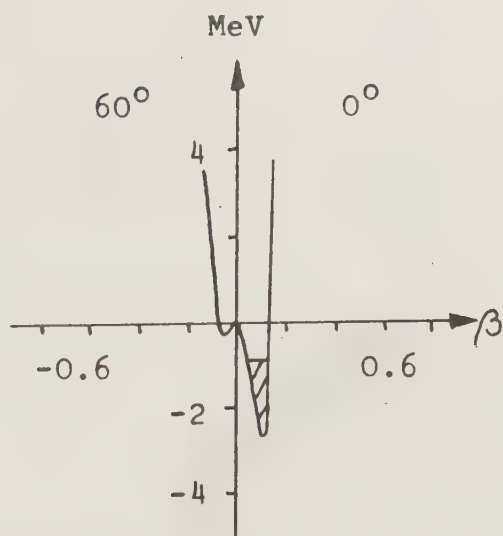
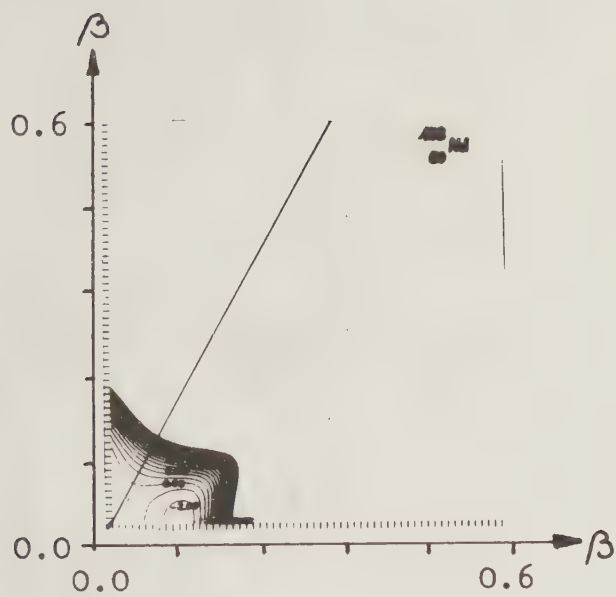


Fig. 28

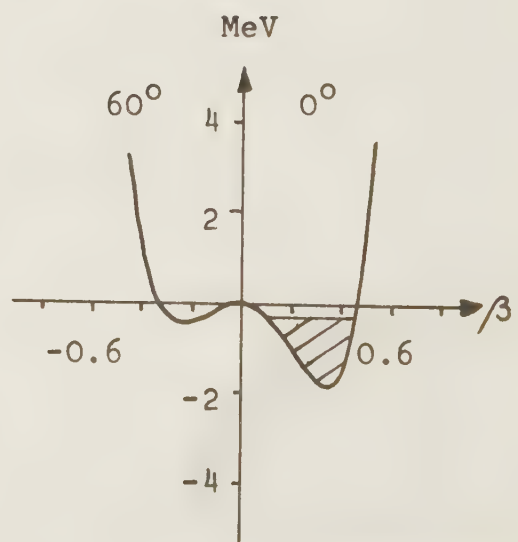
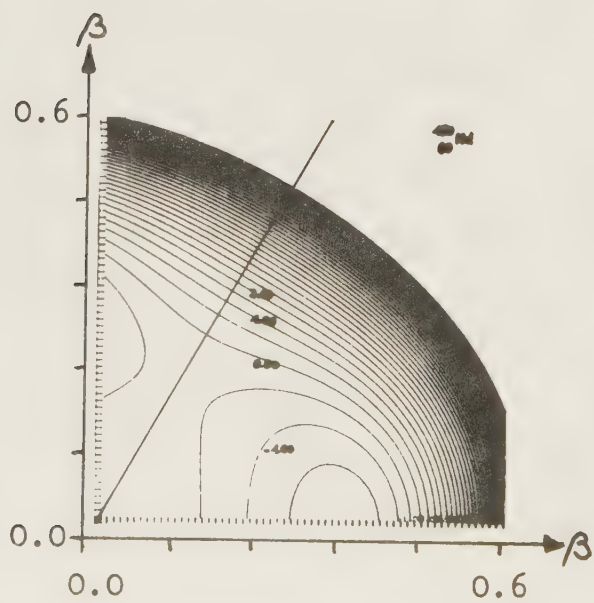
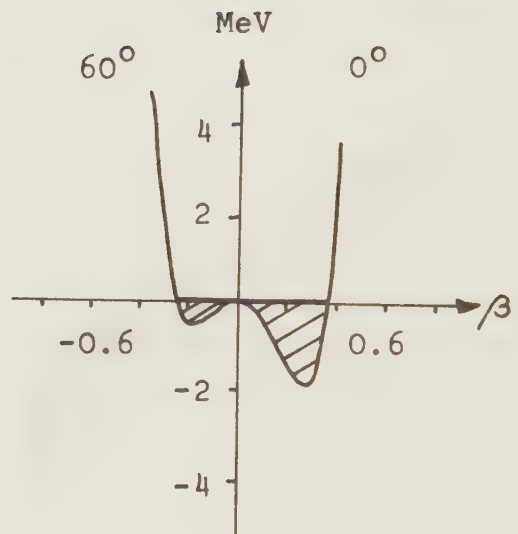
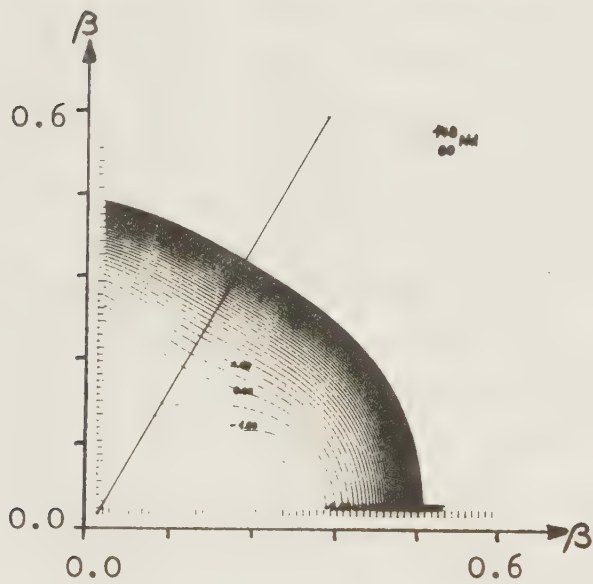
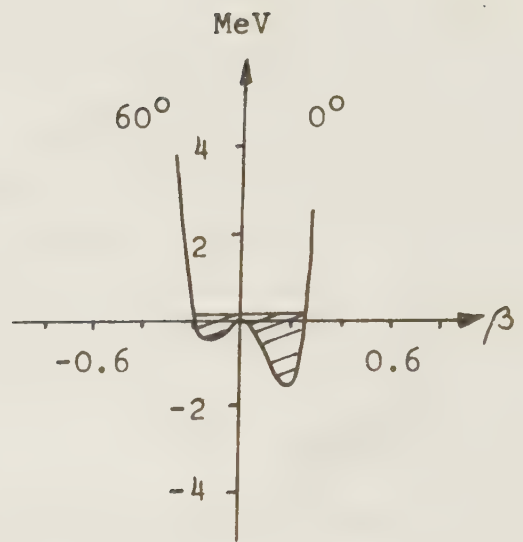
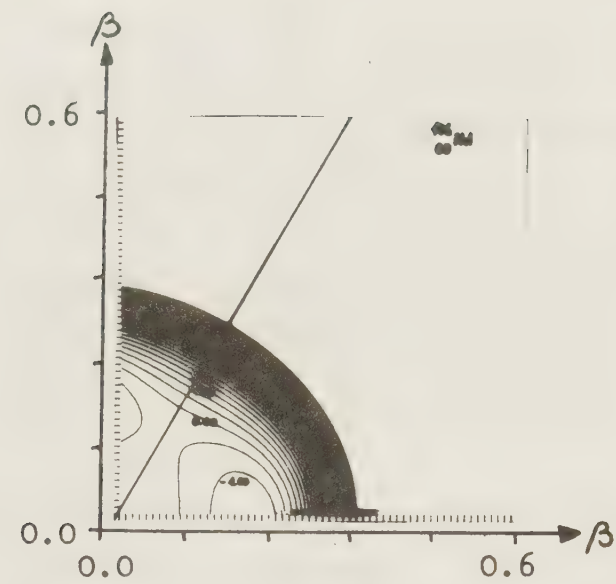


Fig. 29

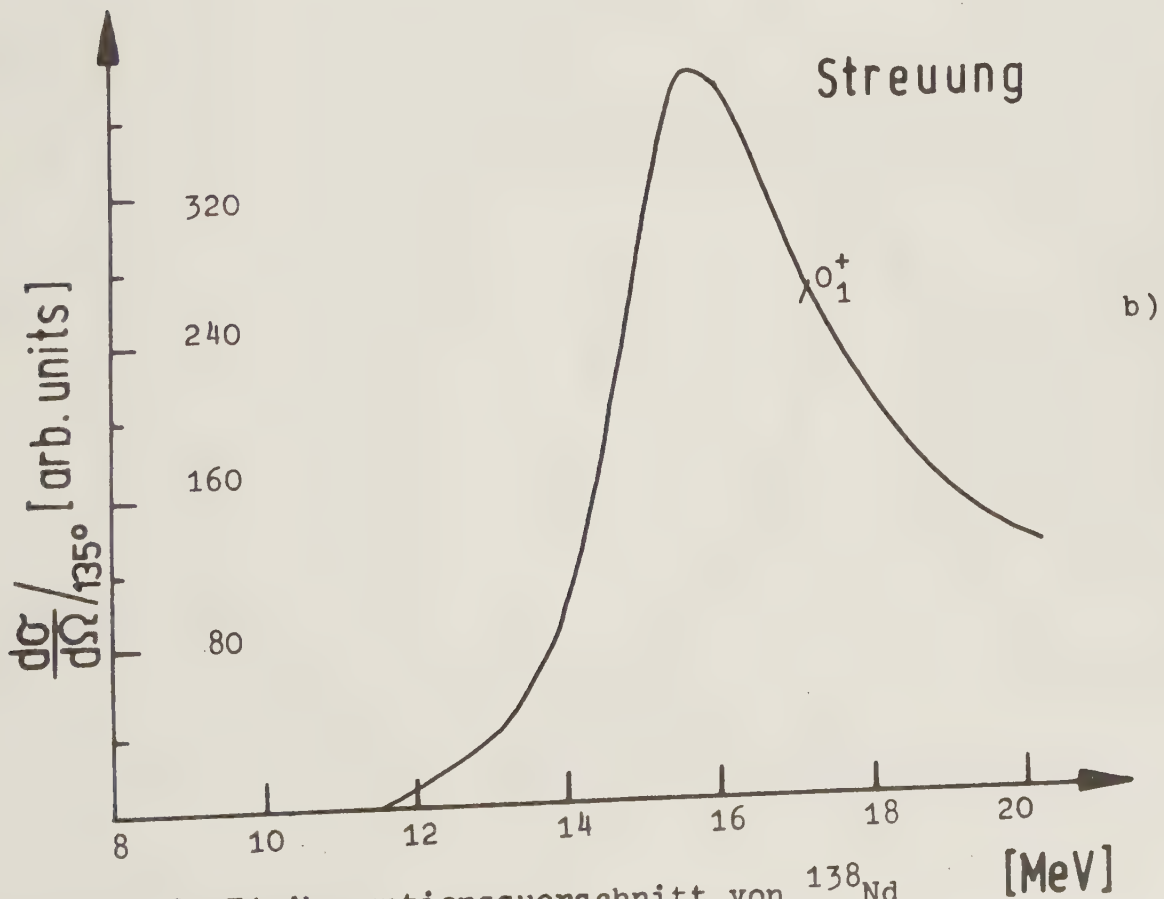
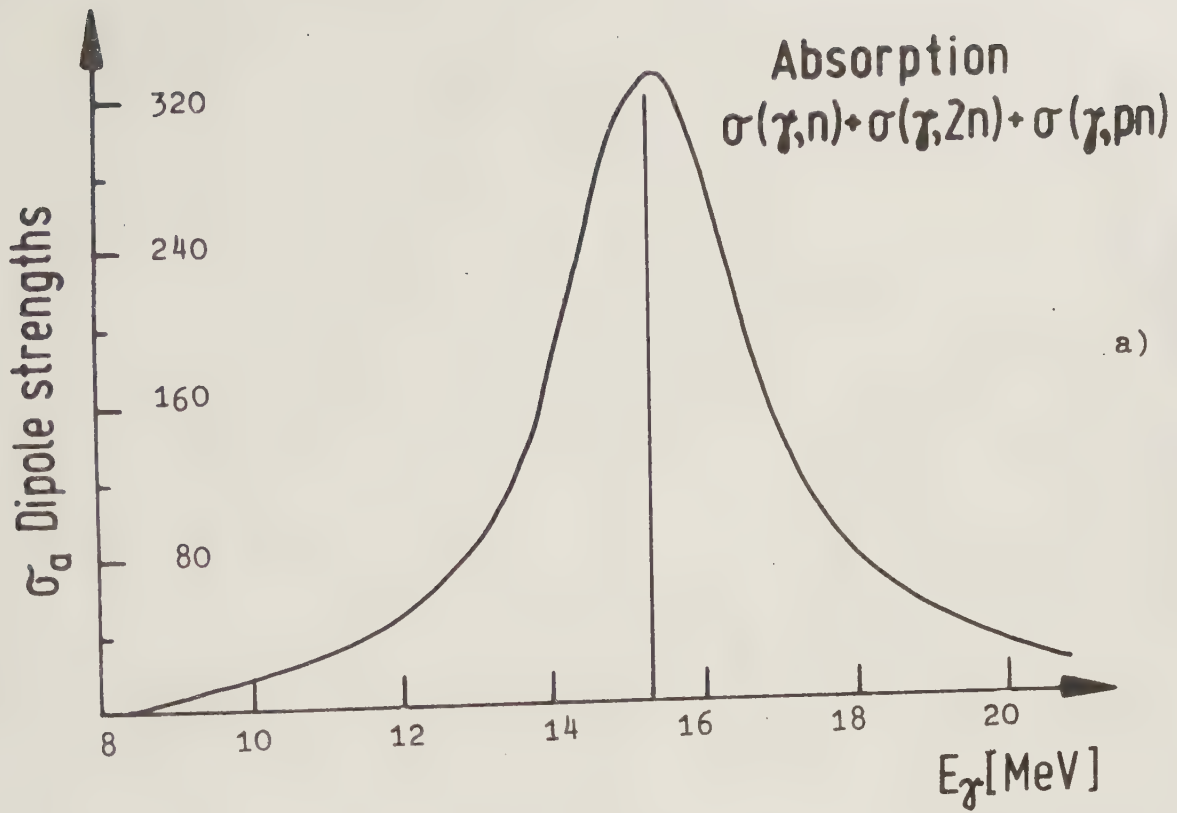


Fig. 30a E1-Absorptionsquerschnitt von ^{138}Nd
 Fig. 30b E1-Streuquerschnitt von ^{138}Nd

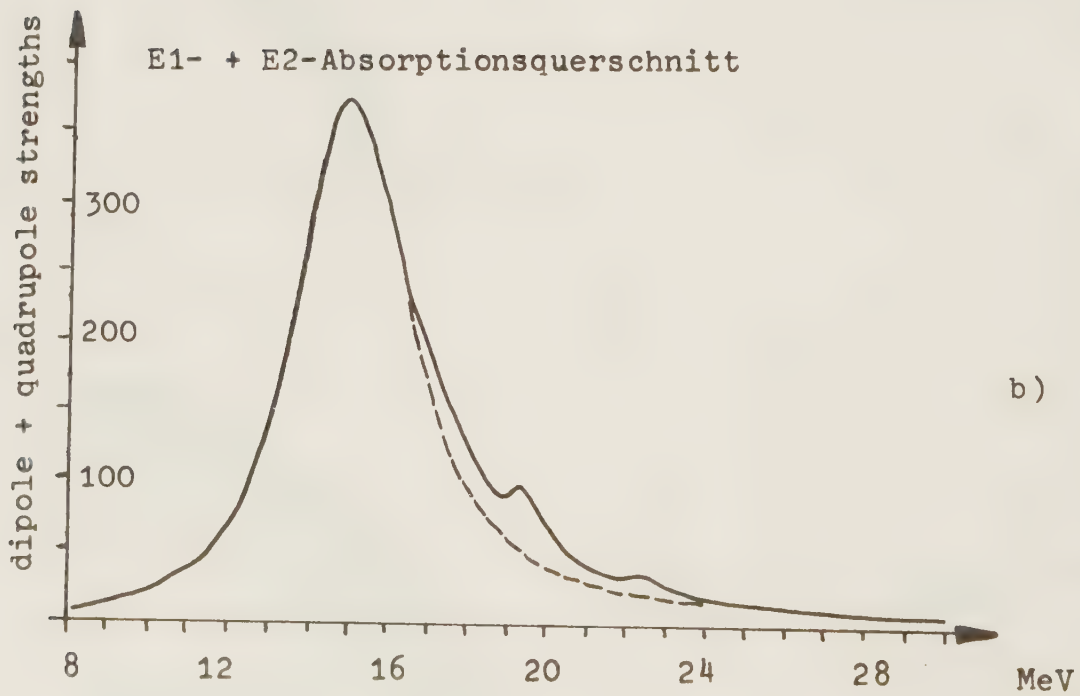
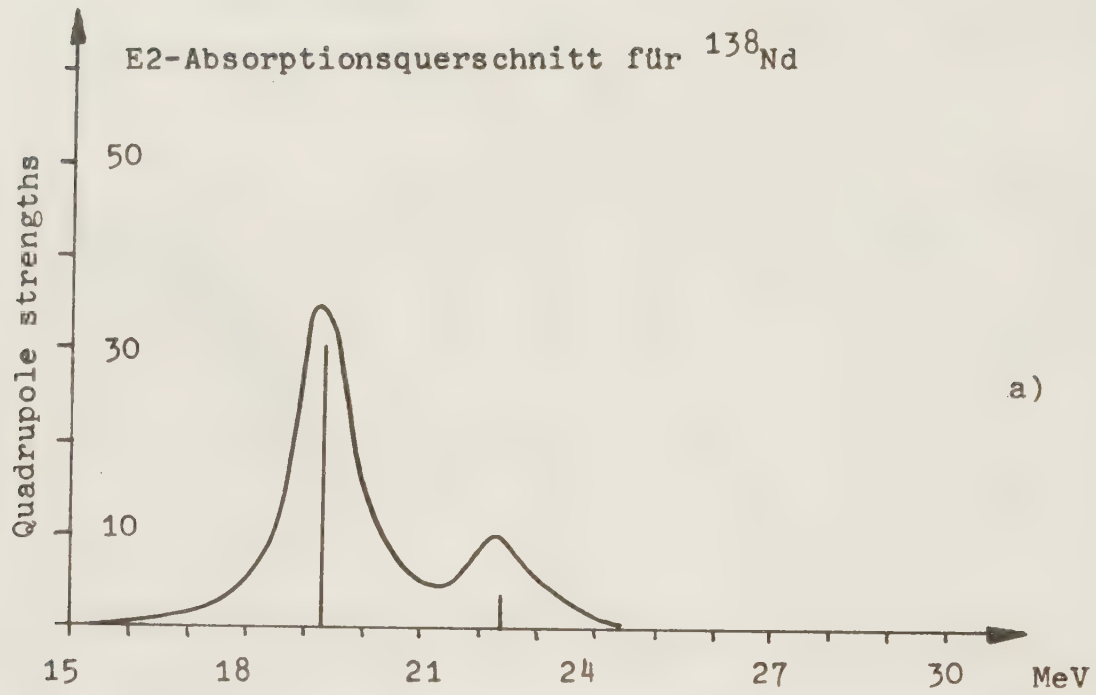


Fig. 31

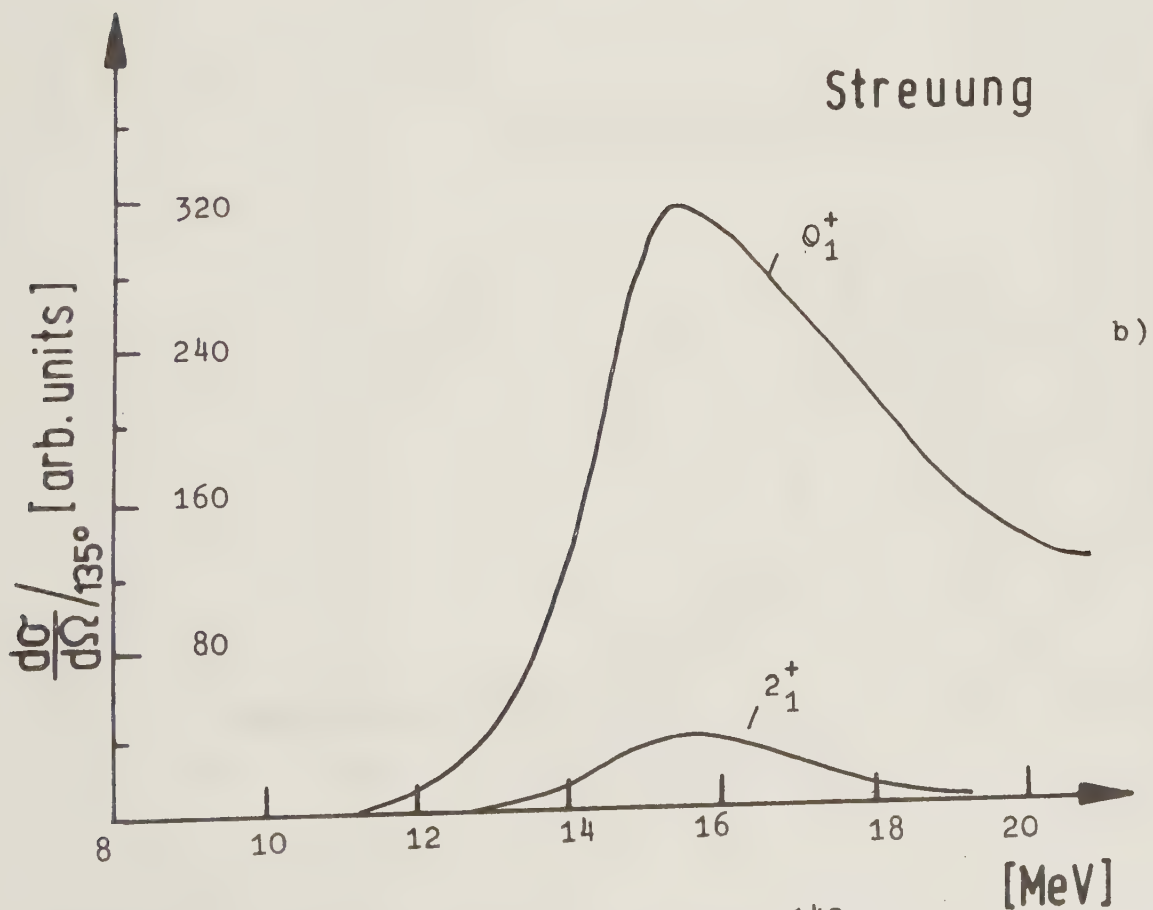
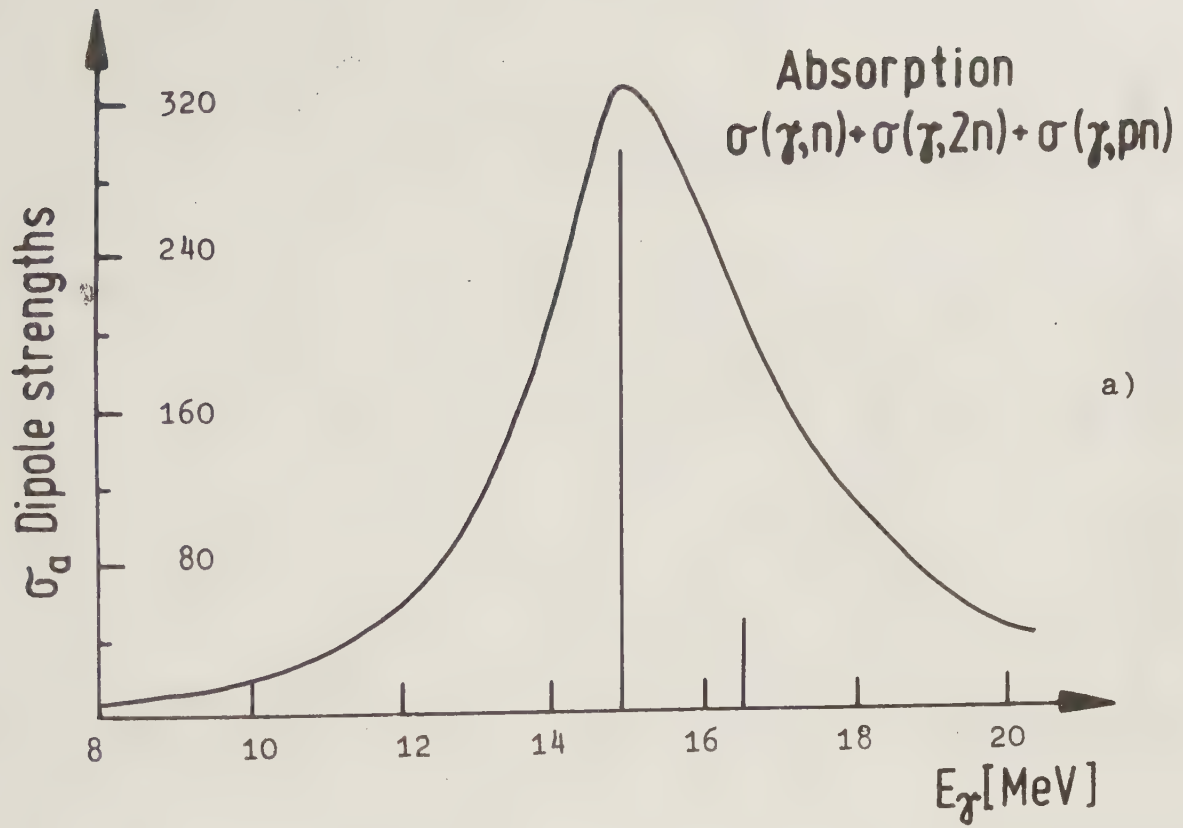


Fig. 32a E1-Absorptionsquerschnitt für ^{142}Nd

Fig. 32b E1-Streuquerschnitte für ^{142}Nd

Fig.32

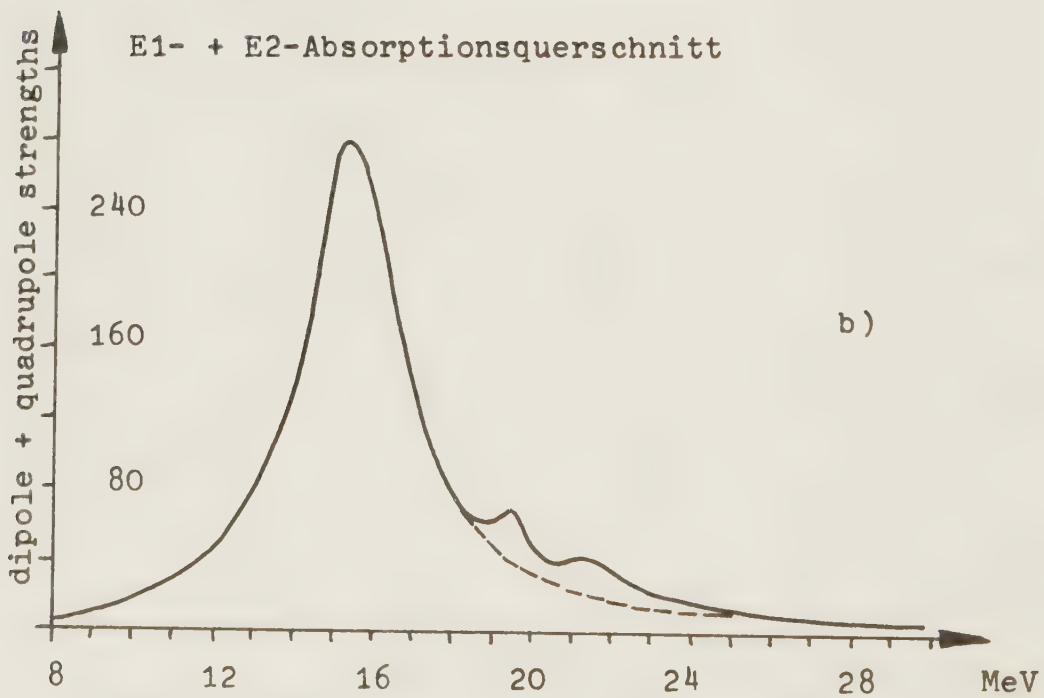
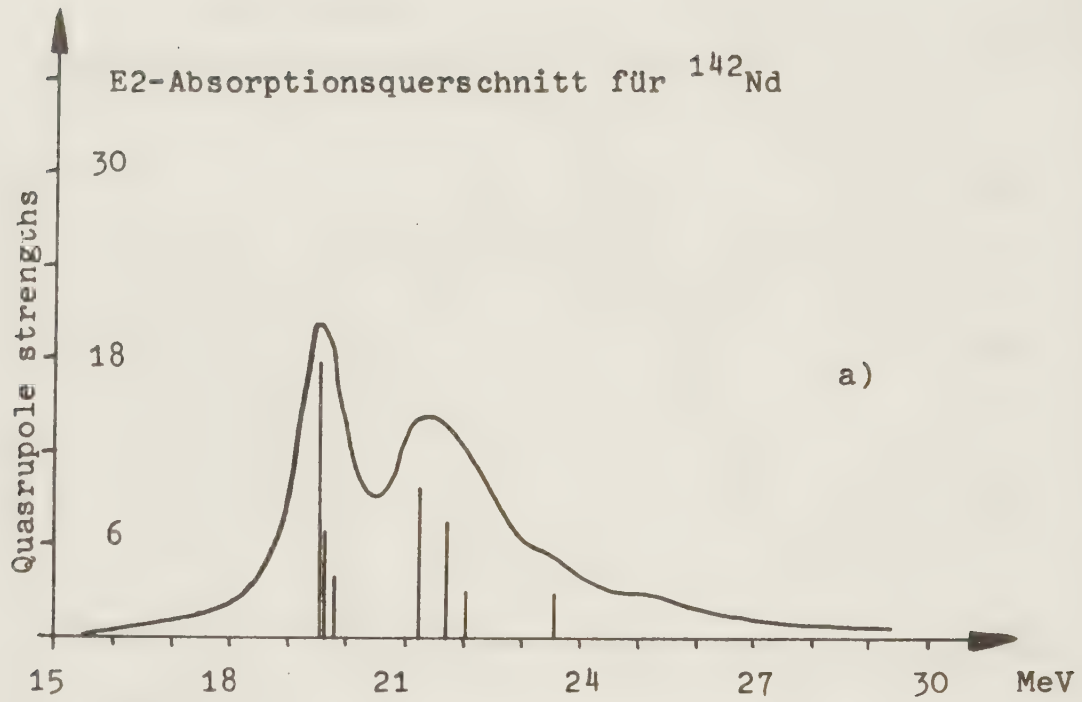


Fig. 33

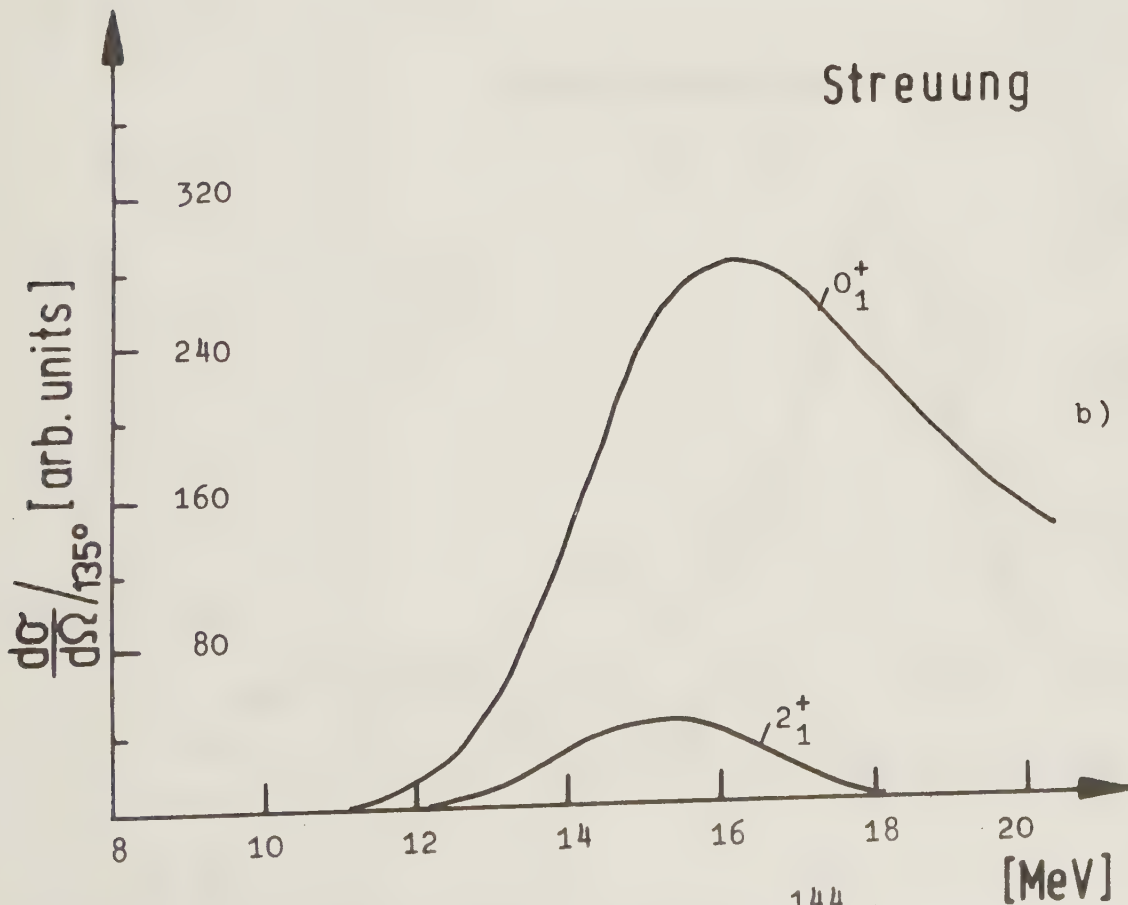
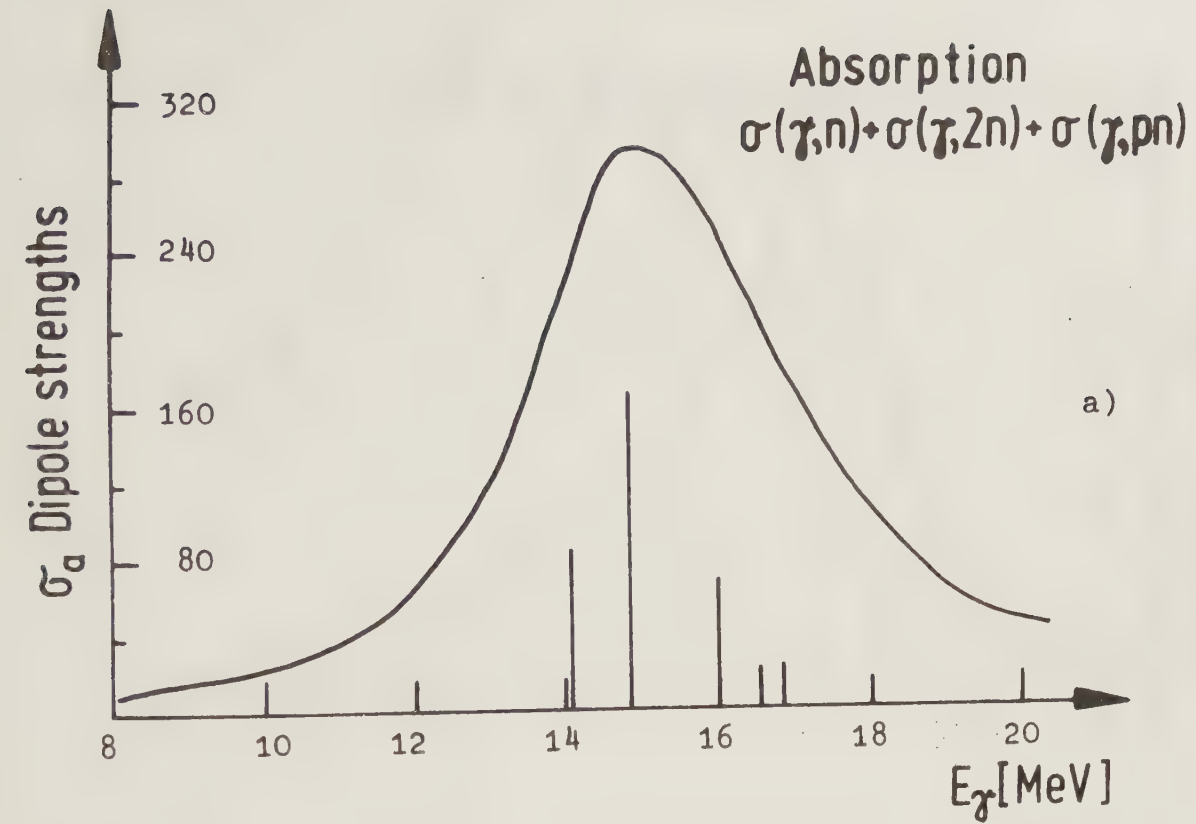


Fig. 34a E1-Absorptionsquerschnitt für ^{144}Nd

Fig. 34b E1-Streuquerschnitte für ^{144}Nd

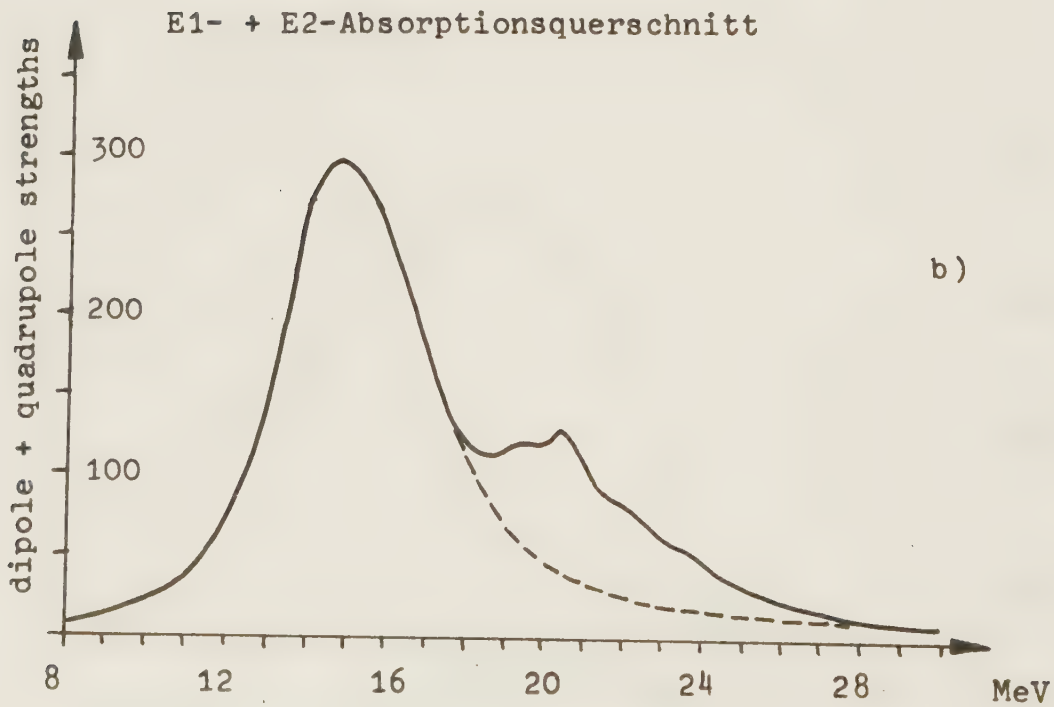
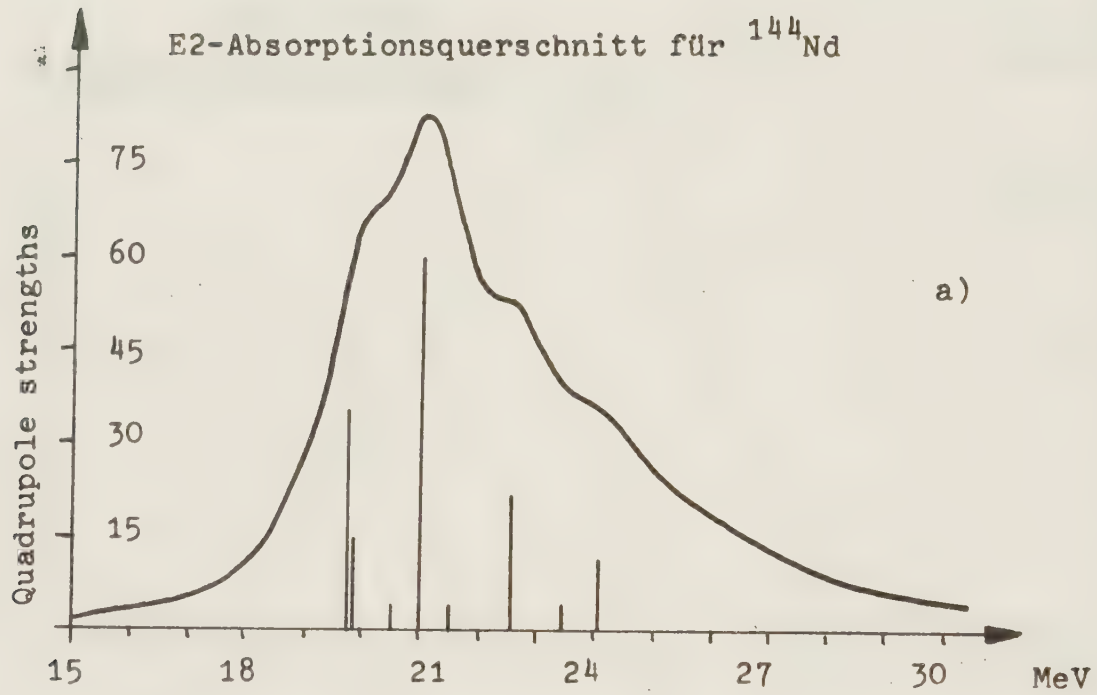


Fig. 35

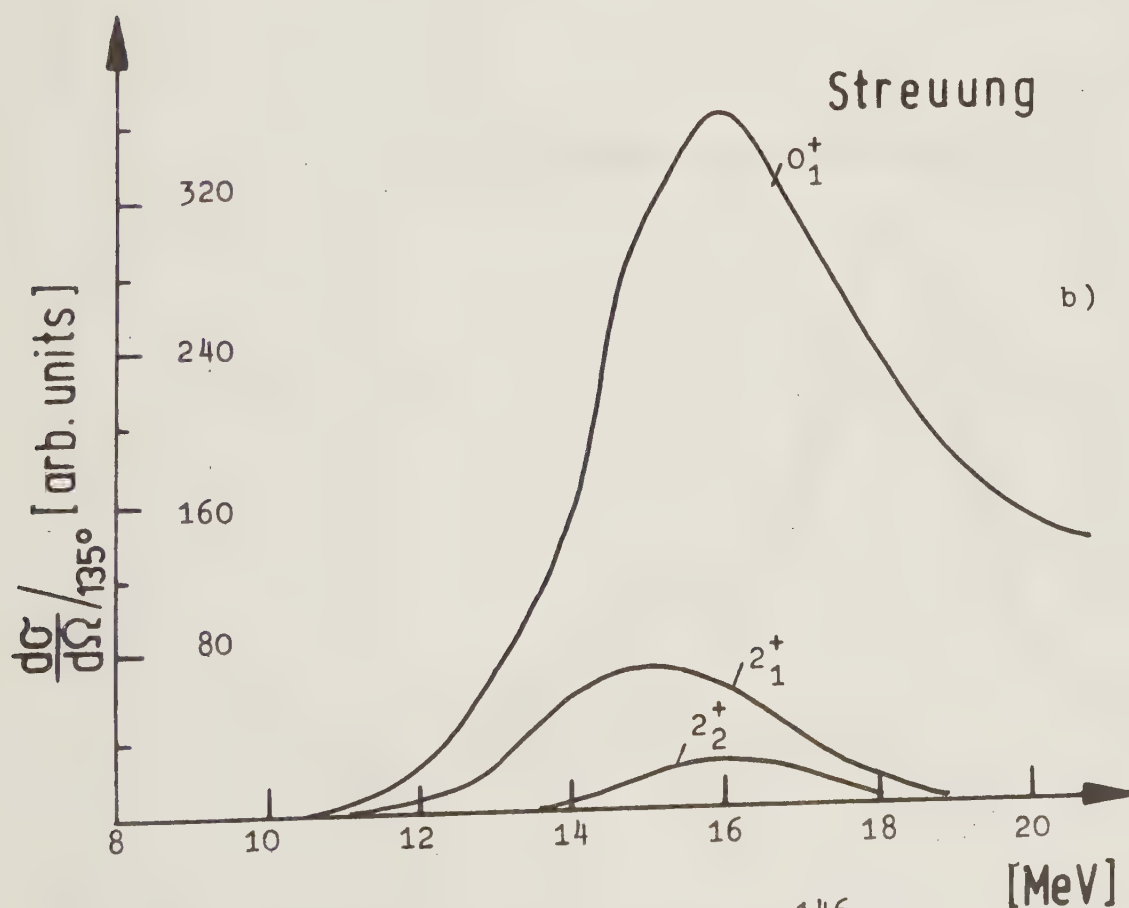
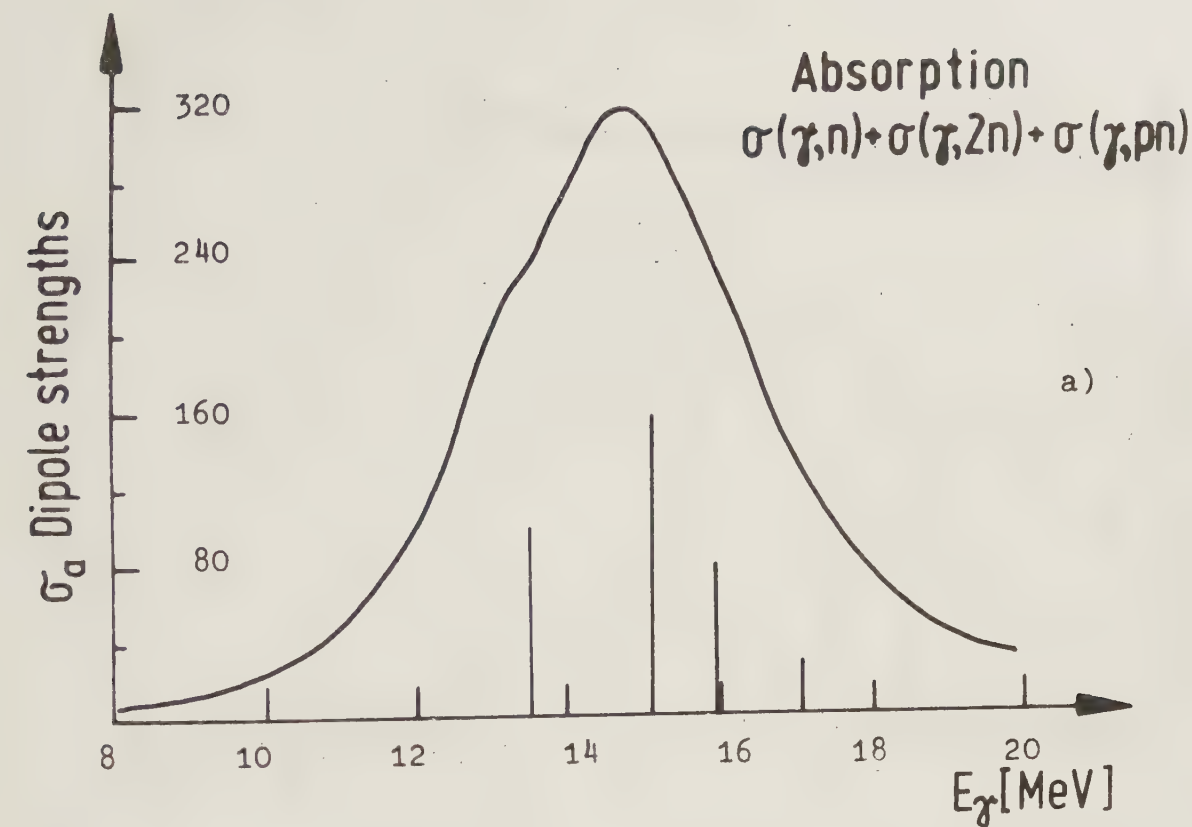


Fig. 36a E1-Absorptionsquerschnitt für ^{146}Nd

Fig. 36b E1-Streuquerschnitt für ^{146}Nd

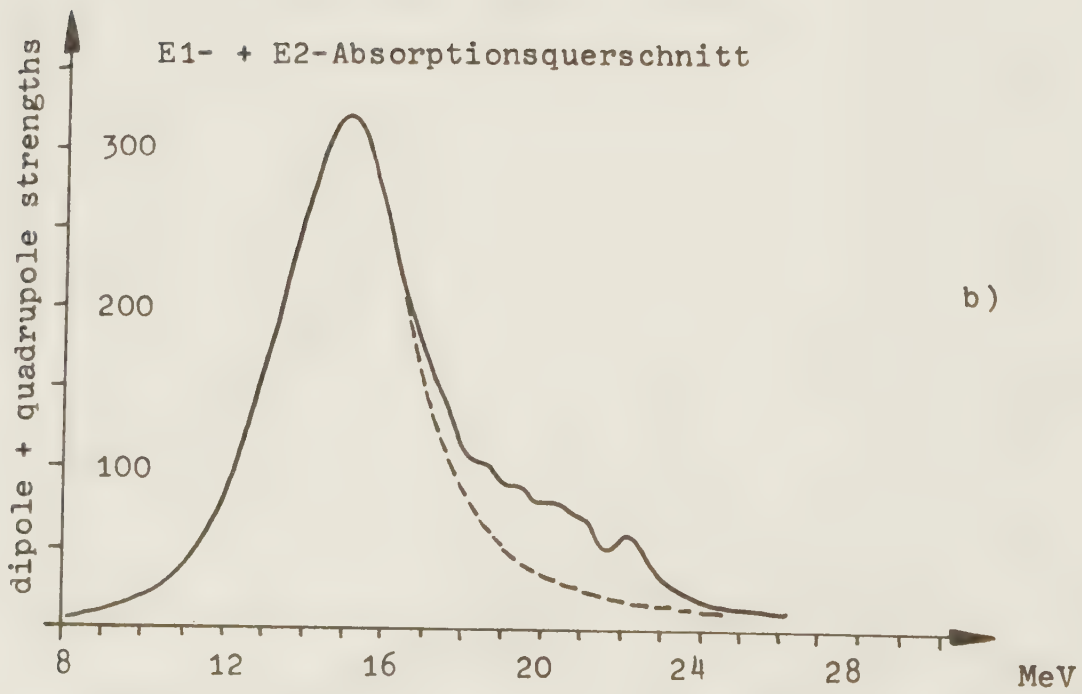
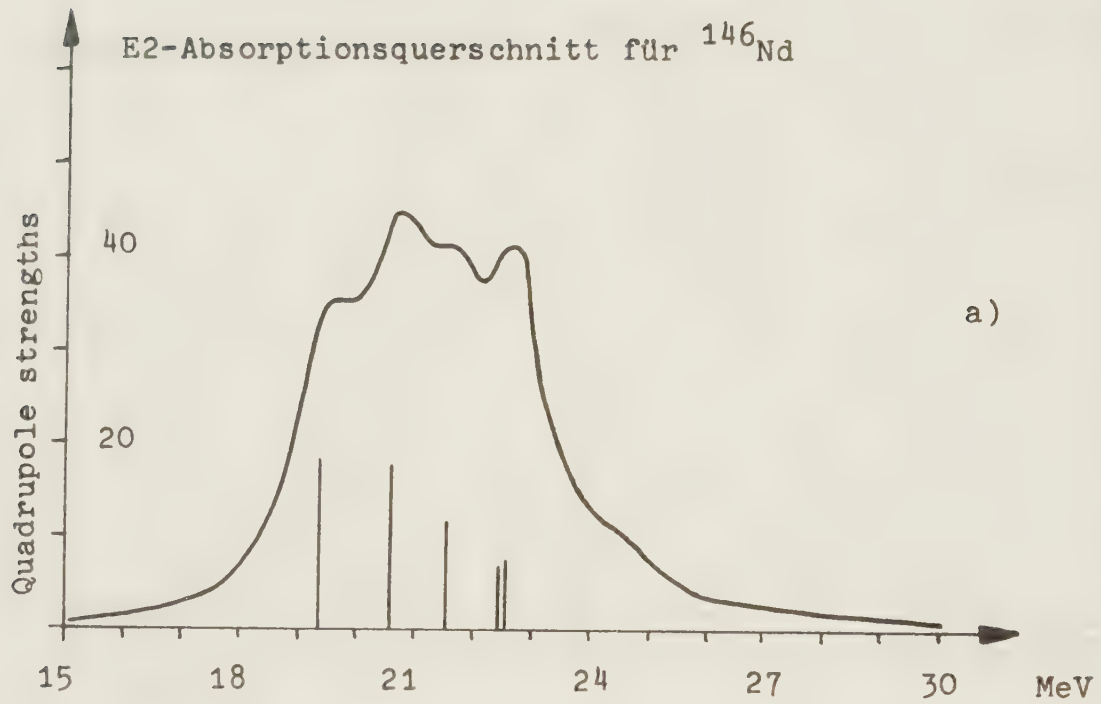


Fig. 37

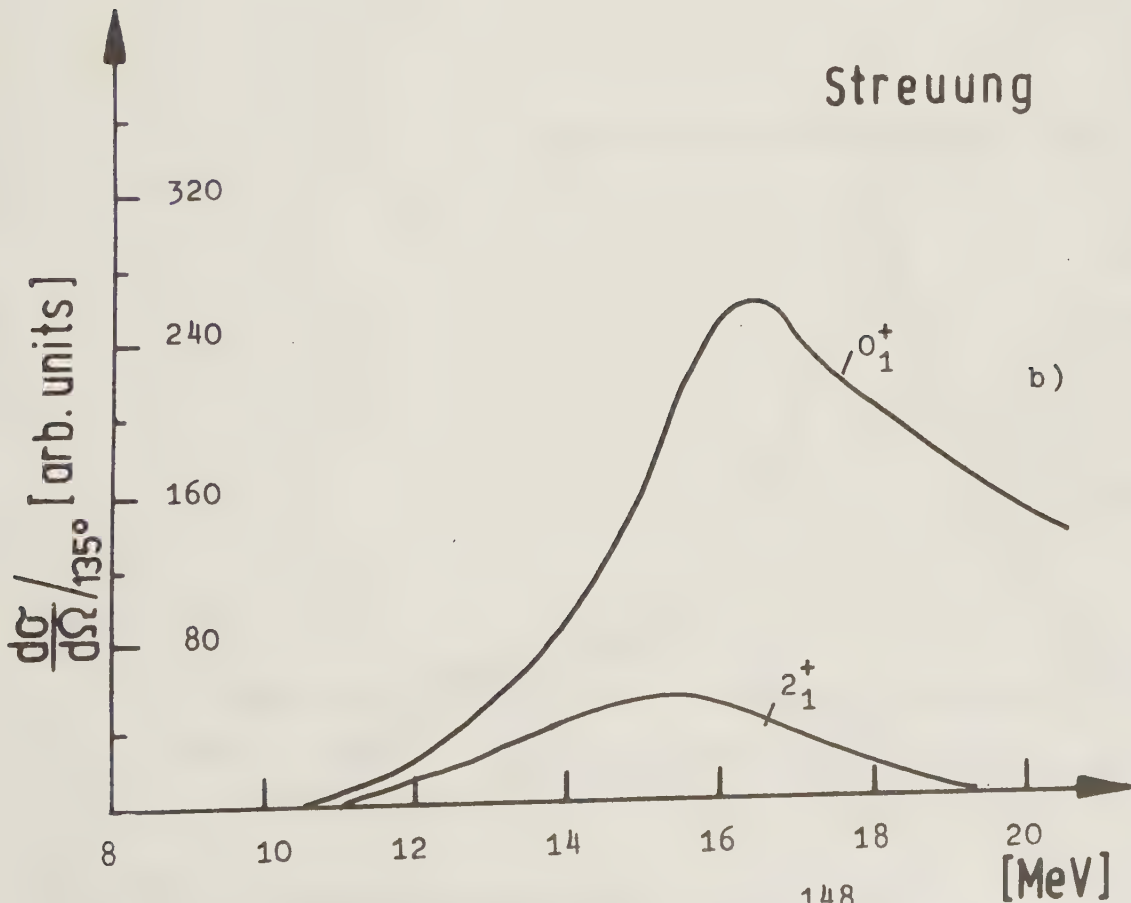
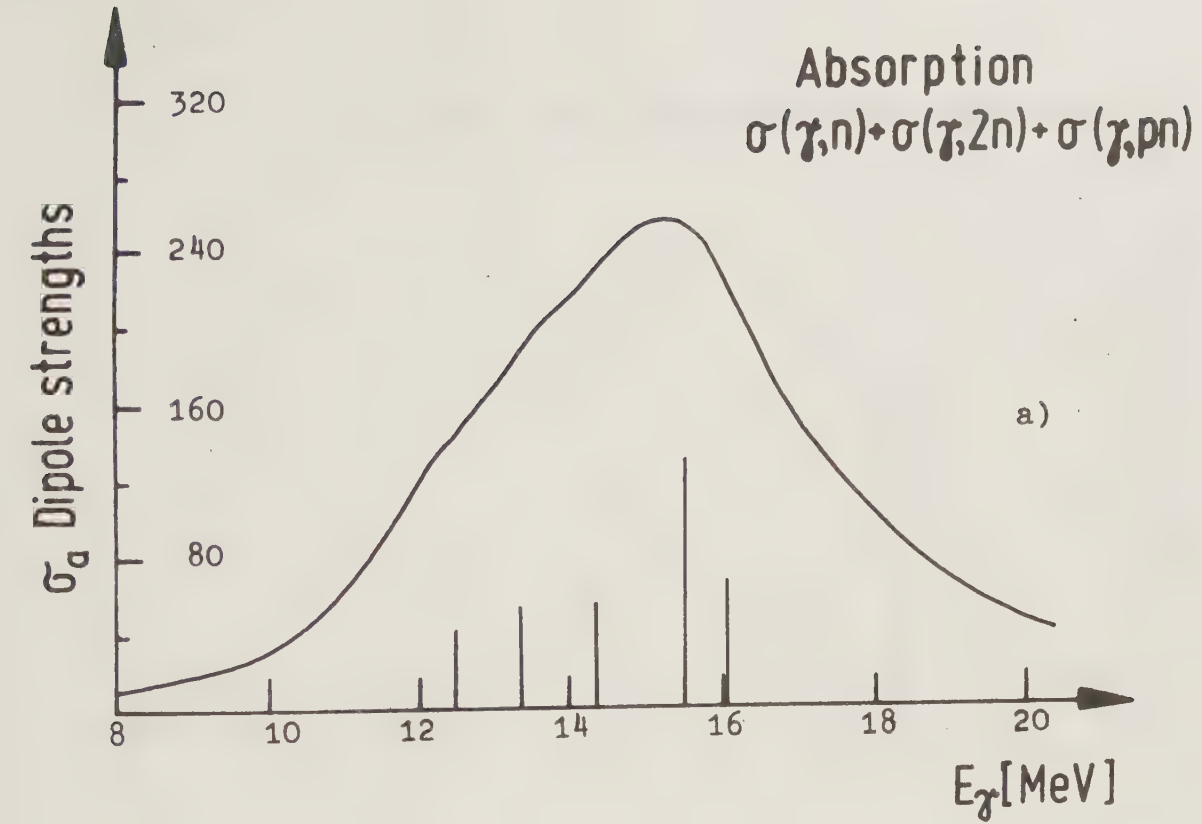


Fig. 38a E1-Absorptionsquerschnitt für ^{148}Nd

Fig. 38b E1-Streuquerschnitte für ^{148}Nd

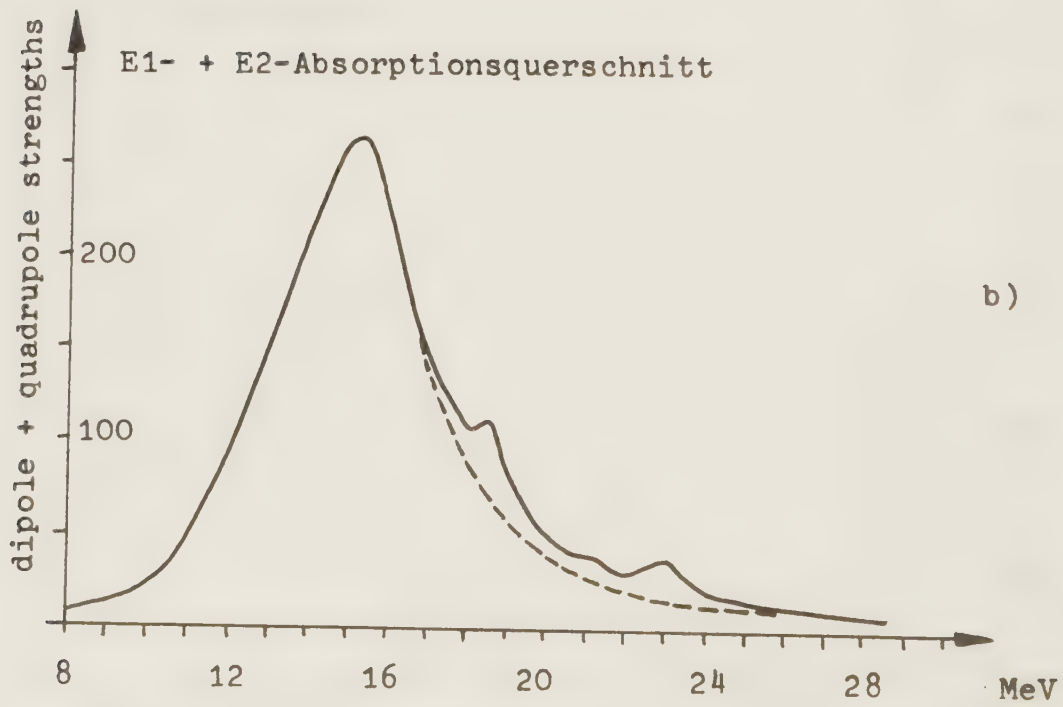
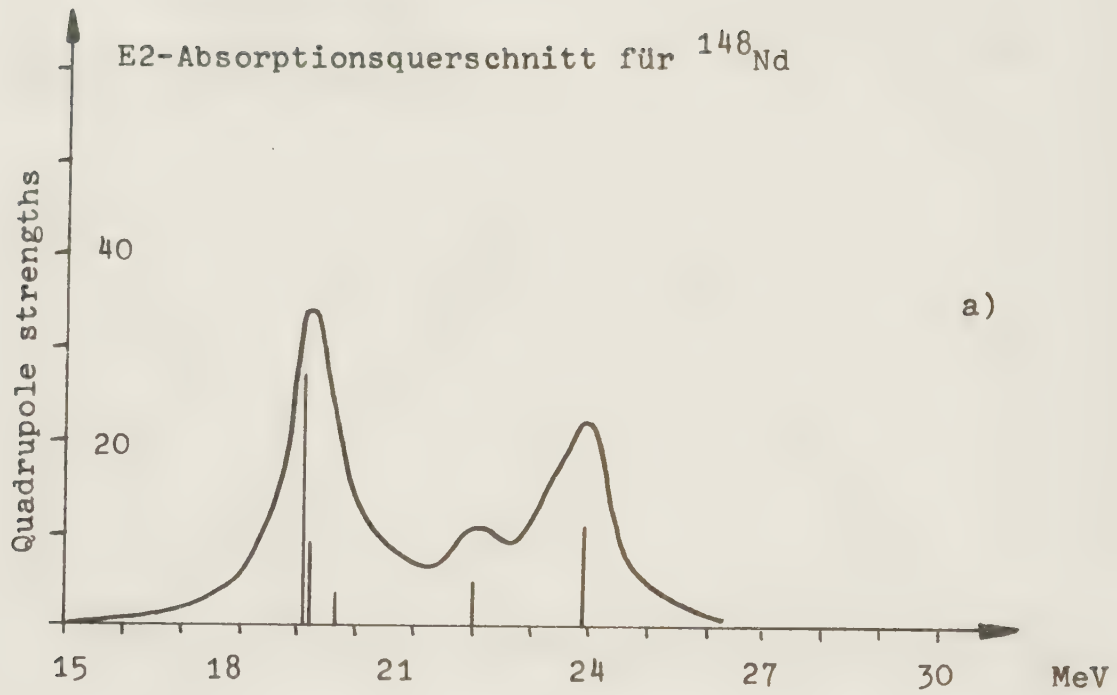


Fig. 39

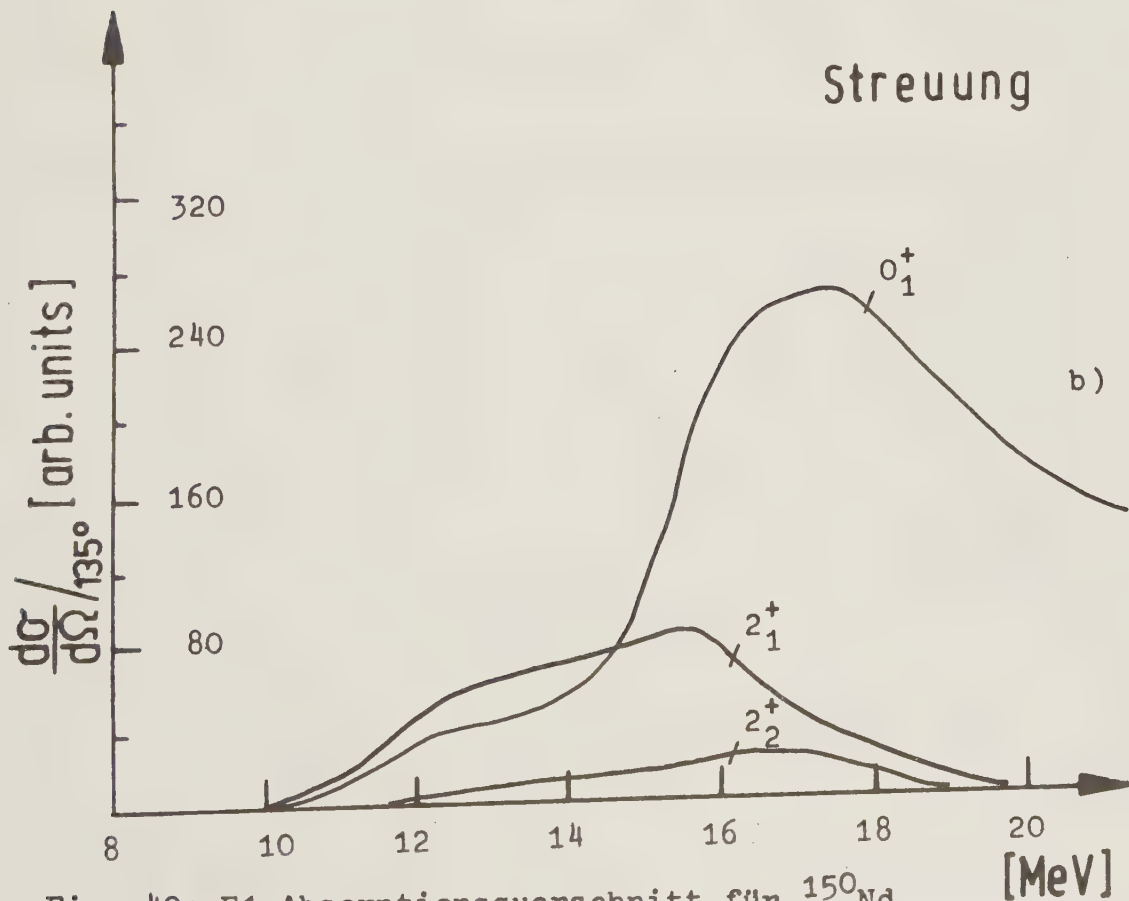
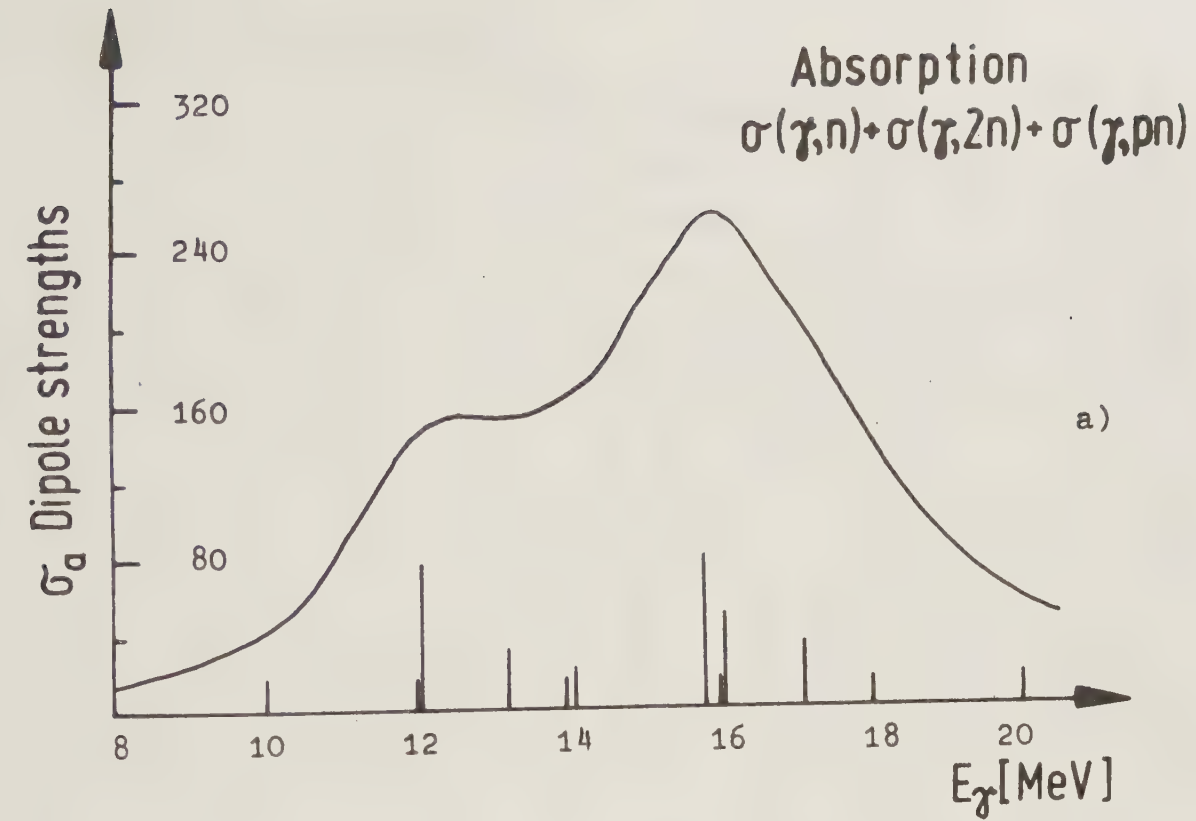


Fig. 40a E1-Absorptionsquerschnitt für ^{150}Nd
 Fig. 40b E1-Streuquerschnitte für ^{150}Nd

Fig. 40

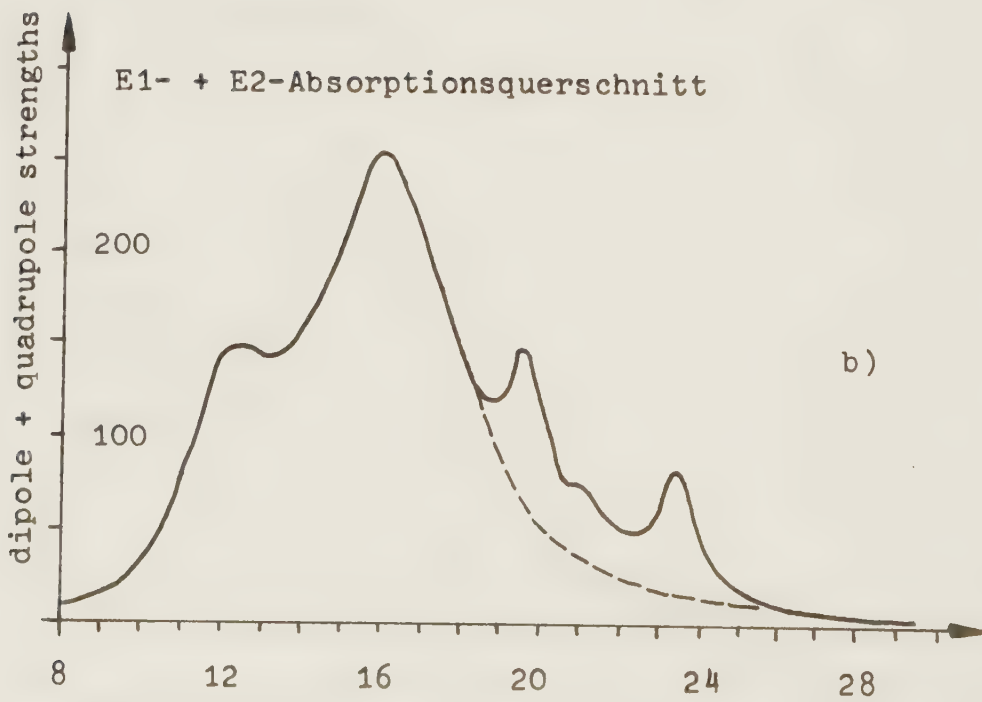
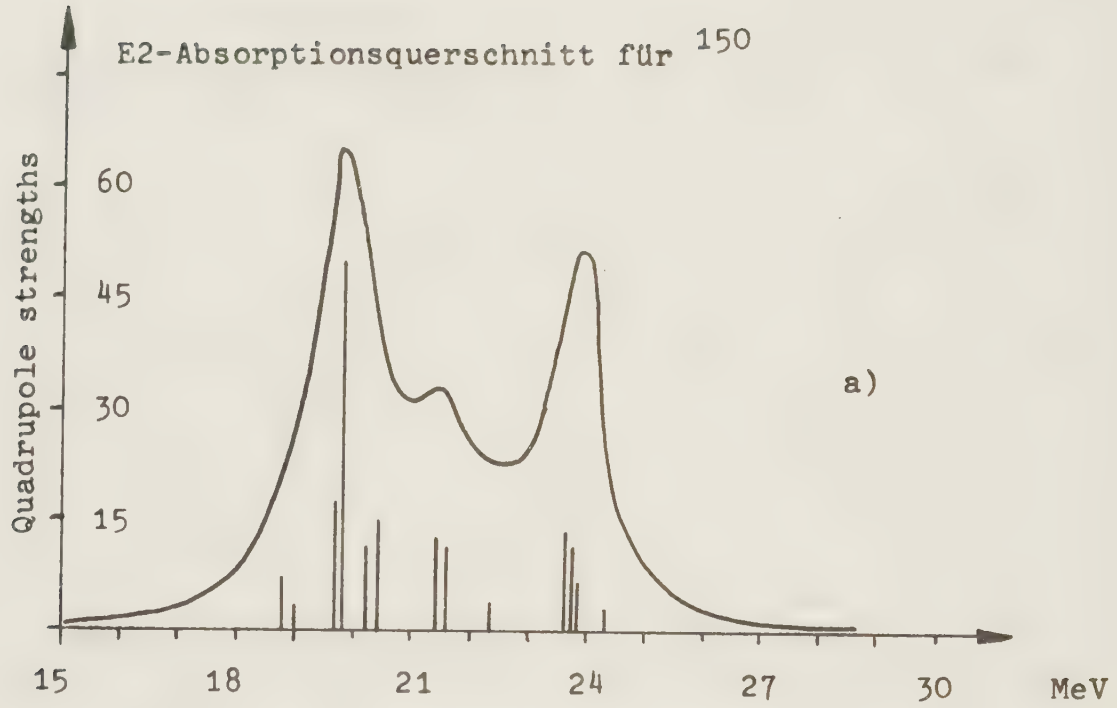


Fig. 41

5.3.2 Die Sm-Isotopenreihe

Als zweites Beispiel für einen Übergang von einem sphärischen Kern zu einem prolaten Rotator dient nun die Sm-Isotopenreihe. Die PES dieser Reihe, Fig. 42 und Fig. 43, zeigen eine Entwicklung von einem magischen Neutronenkern ^{144}Sm mit einem sphärischen Grundzustand und einem zweiten prolaten Minimum über anharmonische Vibratoren zu prolaten Rotatoren, bei denen die Lage des Minimums nahezu unverändert bleibt, der Potentialtopf jedoch tiefer wird.

Entsprechend dem sphärischen Minimum hat der E1-Absorptionsquerschnitt von ^{144}Sm ($T_D = 2.5$ MeV) in Fig 44a eine starke Dipollinie. Im E2-Absorptionsquerschnitt in Fig 45a ($T_Q = 0.7$ MeV) zeigt sich eine dominante und zwei kleine Quadrupolstärken. In Fig. 45b sind die E1- und E2-Absorptionsquerschnitte addiert dargestellt, wobei die getrichelte Linie, wie bei allen folgenden Figuren, den Verlauf der E1-Resonanz angibt.

Die Fig. 46 und die Fig. 47 zeigen typische Absorptionsquerschnitte für einen anharmonischen Vibrator, wie ihn ^{146}Sm darstellt. Die Breiten wurden mit $T_D = 2.5$ MeV und $T_Q = 1.0$ MeV angesetzt.

^{150}Sm ist ein anharmonischer Vibrator mit einem sehr breiten Potentialtopf, bei dem auf der prolaten Achse Rotationseigenschaften angedeutet sind. Der Einfluß der verschiedenen Freiheitsgrade zeigt sich in einer Aufspaltung in mehrere Dipolstärken in Fig. 48a ($T_D = 2.5$ MeV) und im ansteigenden Beitrag der inelastischen Streuquerschnitte (Fig. 48b).

Auch die Quadrupolstärken spalten in mehrere Linien auf. Der Absorptionsquerschnitt in Fig. 49a ($T_Q = 1.0$ MeV) zeigt mit drei Peaks schon den typischen Verlauf für einen Rotationskern. Die Fig. 49b stellt die addierten E1- und E2-Absorptionsquerschnitte dar.

Die letzten drei Kerne der Reihe sind Rotationskerne. Die Breite der E1-Resonanzen wurde bei allen diesen Kernen mit $T_D = 3$ MeV angesetzt.

In den Streuquerschnitten bleibt der Beitrag der elastischen

Streukurve nahezu unverändert, jedoch die Beiträge der inelastischen Streuquerschnitte nehmen von ^{152}Sm bis ^{156}Sm ab (Fig. 50b, Fig. 52b, Fig. 54b). Bei den E1-Absorptionsquerschnitten ist die Aufspaltung in zwei dominante Peaks, neben etlichen Vibrationssatelliten, zu erkennen. Da ^{152}Sm der in γ -Richtung weichste Kern ist, spalten hier die Dipolstärken in mehrere Linien auf (Fig. 50a).

Der E2-Absorptionsquerschnitt von ^{152}Sm ist in Fig. 51a dargestellt ($T_Q = 1.0 \text{ MeV}$).

Die E2-Querschnitte der letzten beiden Kerne zeigen auf Grund der Wechselwirkung der verschiedenen Freiheitsgrade eine starke Aufspaltung der Quadrupolstärken. Die Strukturen der Absorptionsquerschnitte in Fig. 53a und Fig. 55a zeigen eine beginnende Aufhebung der Entartung entlang der fünf Schwingungsachsen. In den Figuren 51b, 53b, 55b sind jeweils die addierten E1- und E2-Absorptionsquerschnitte dargestellt. Der Verlauf ohne E2-Anteil ist durch die gestrichelte Linie gekennzeichnet.

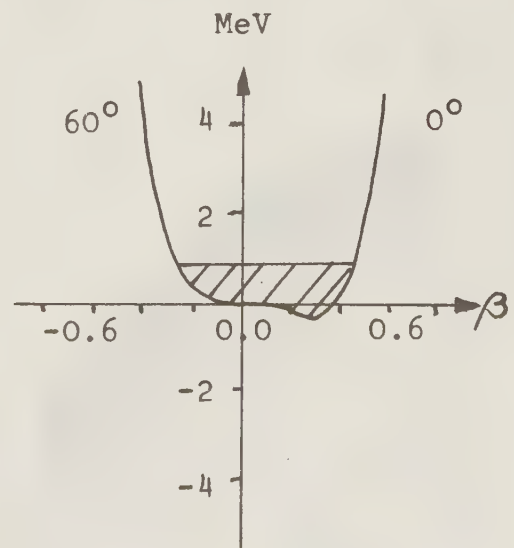
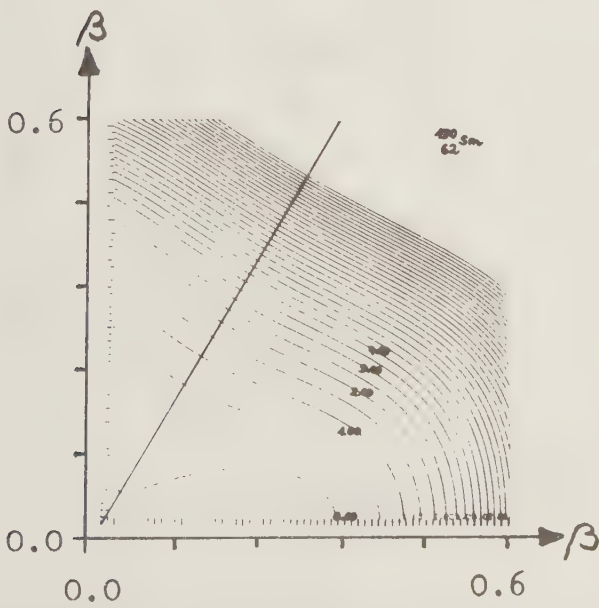
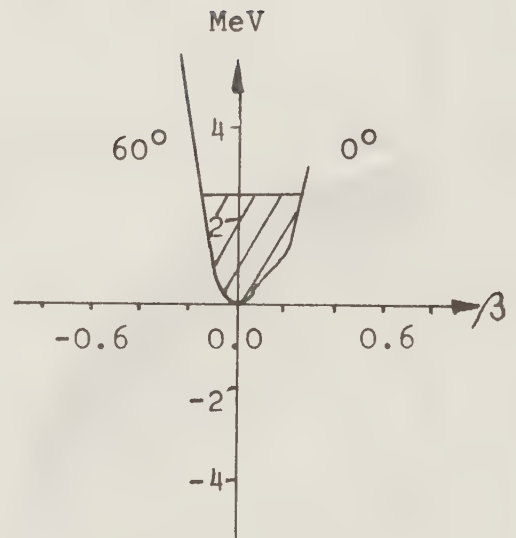
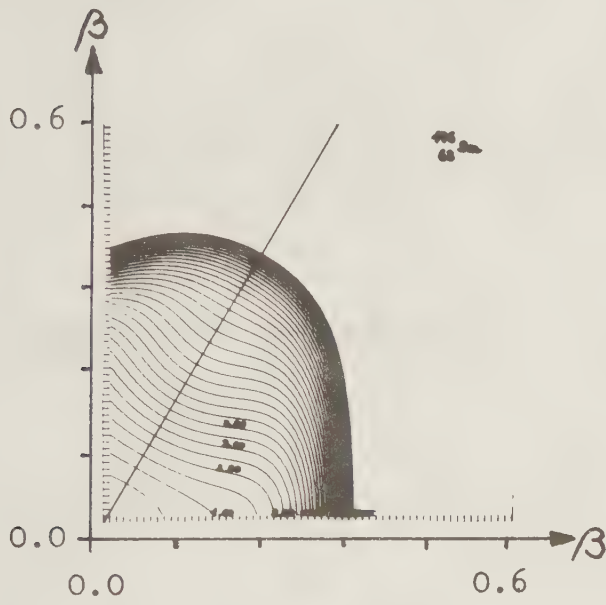
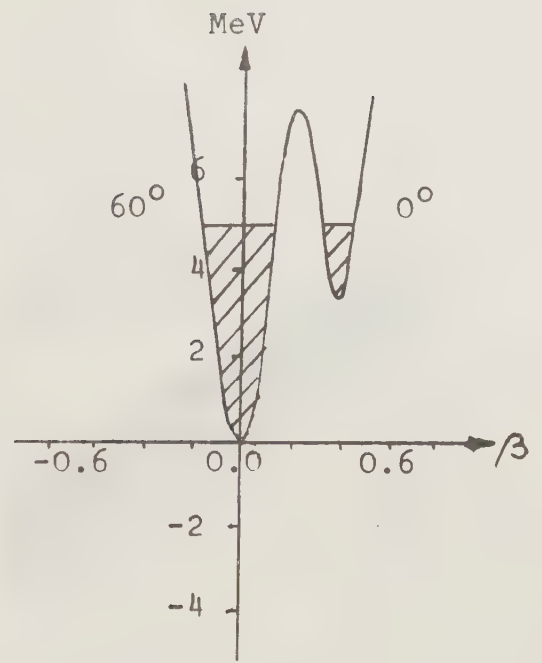
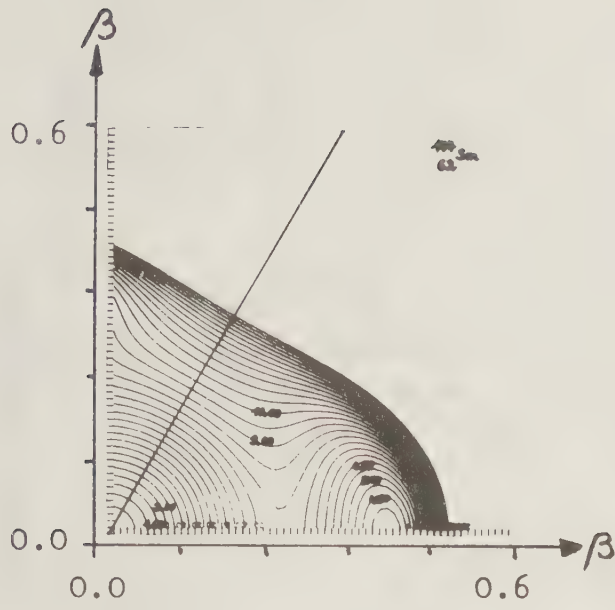


Fig. 42

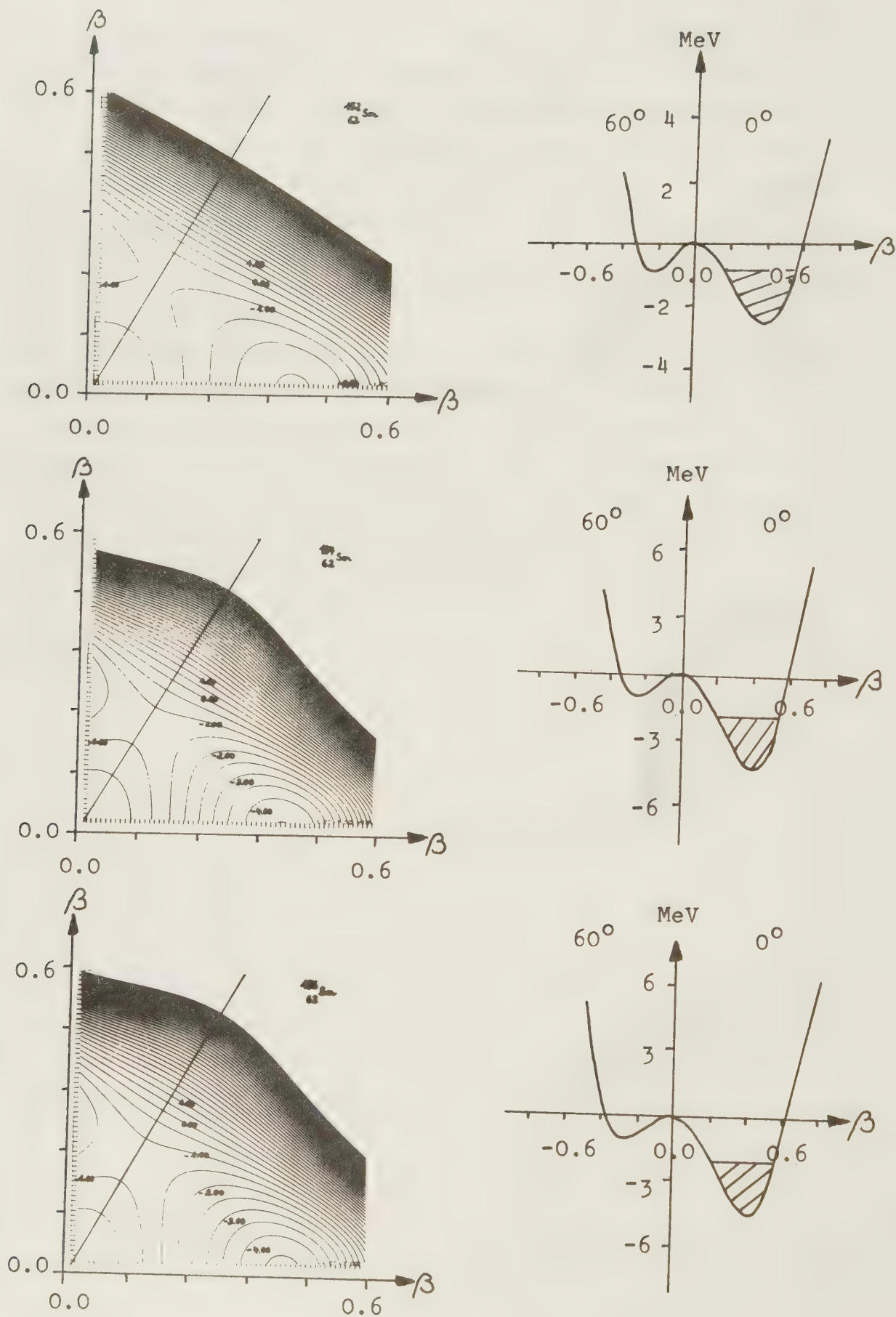


Fig.43

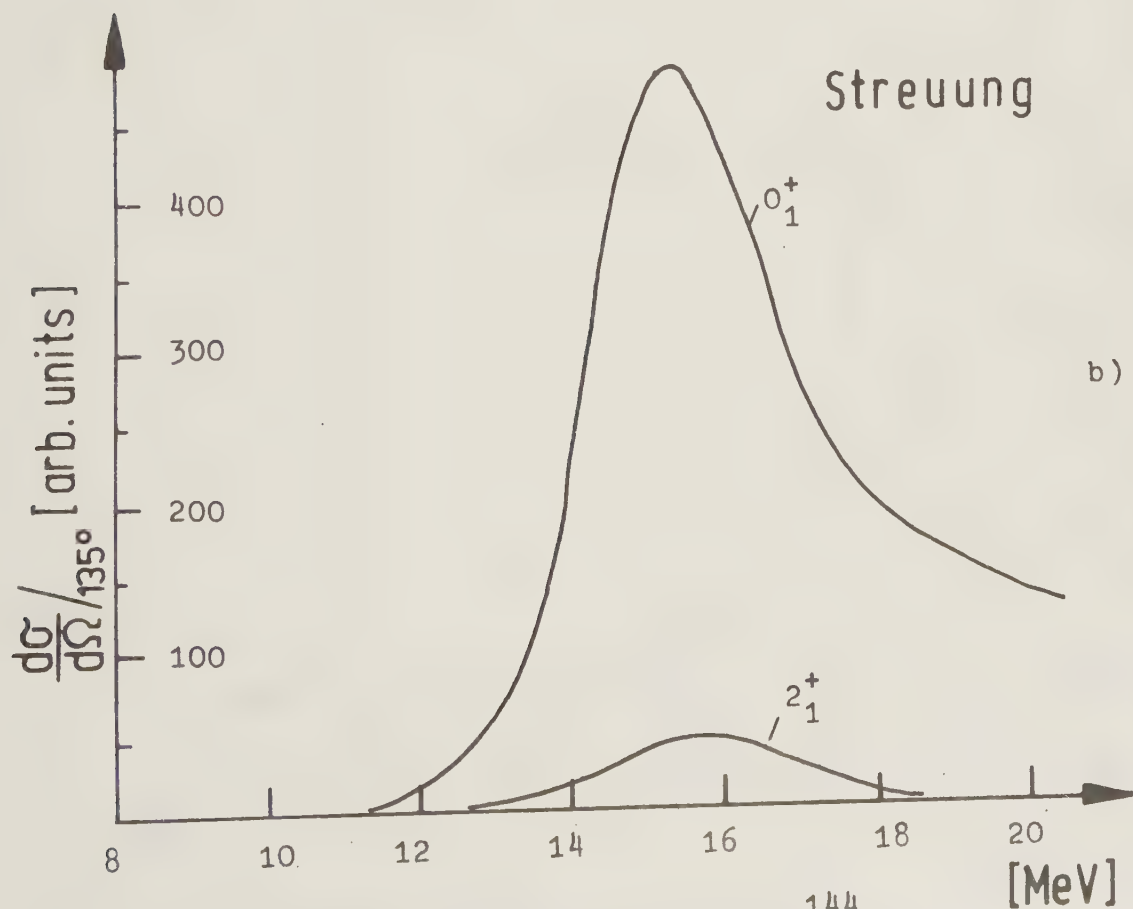
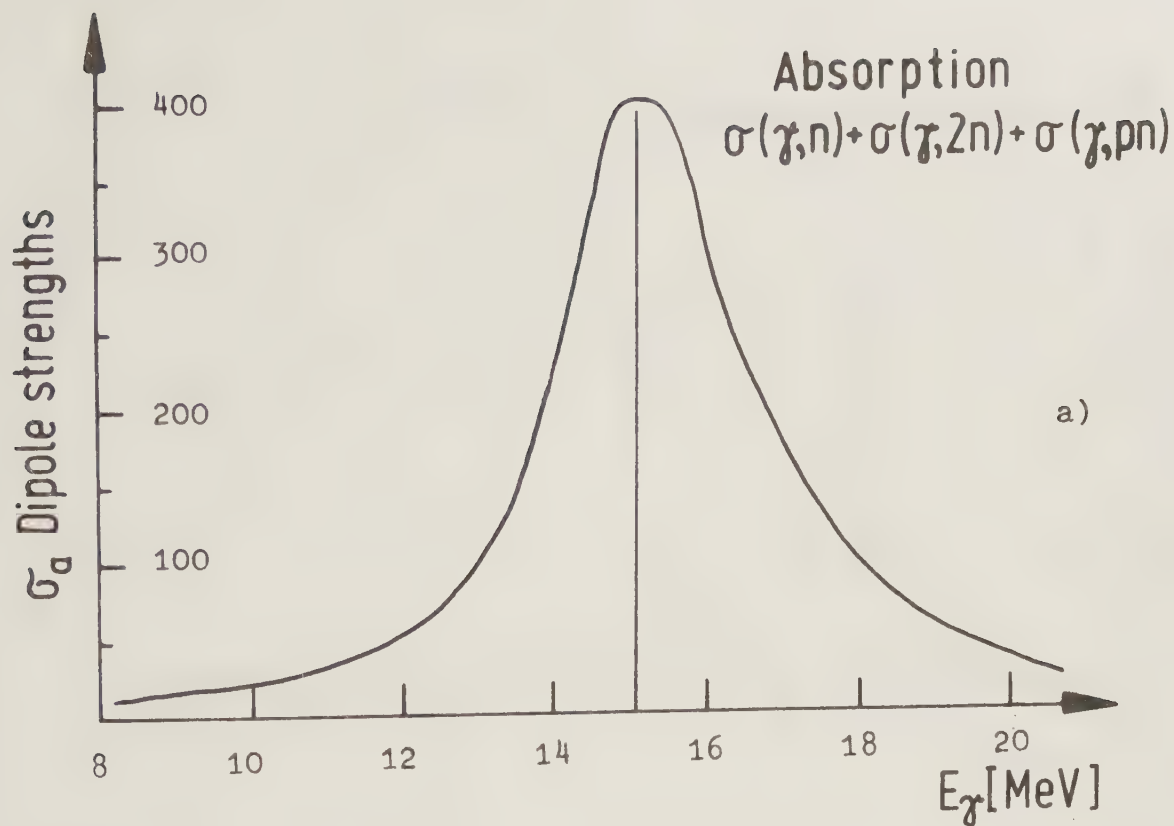


Fig. 44a E1-Absorptionsquerschnitt von ^{144}Sm

Fig. 44b E1-Streuquerschnitte von ^{144}Sm

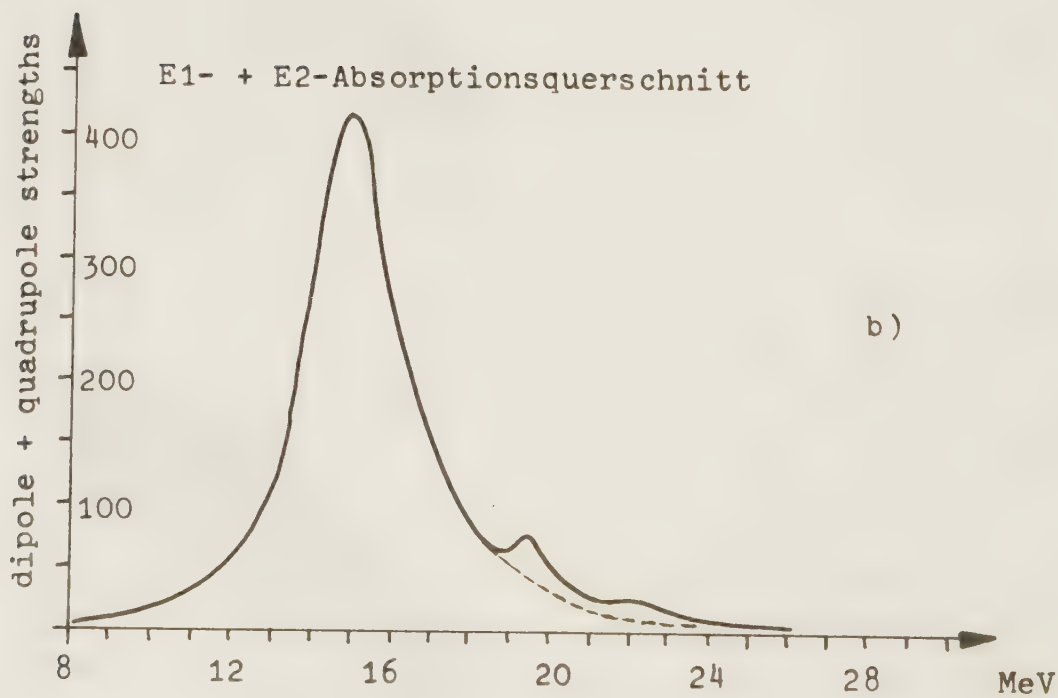
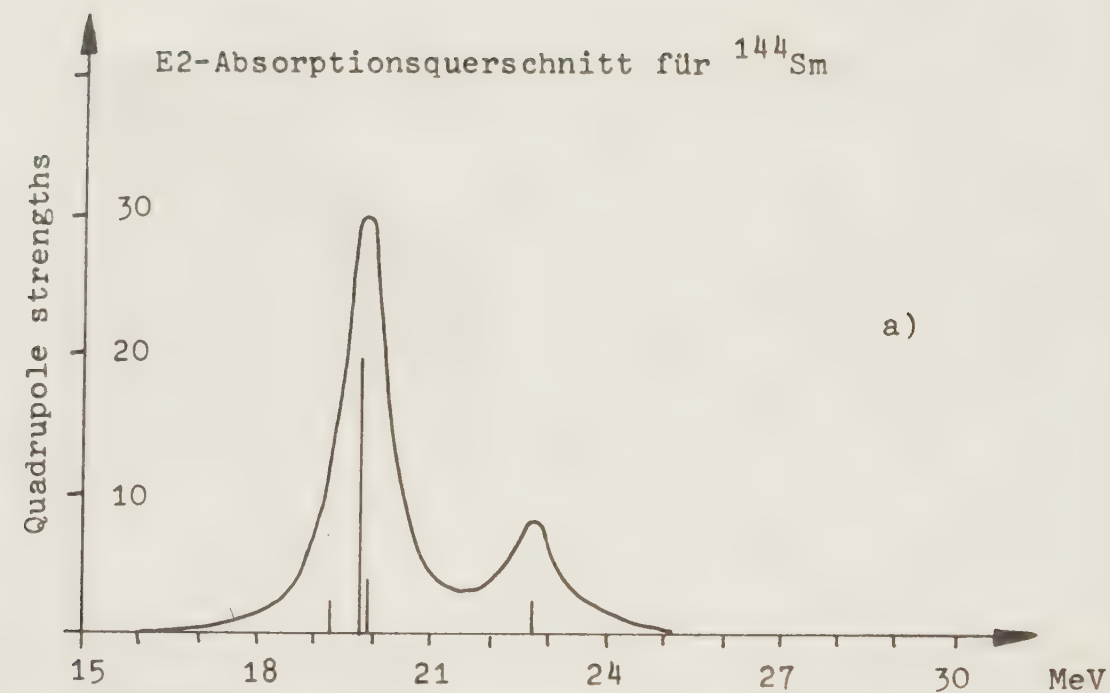


Fig. 45

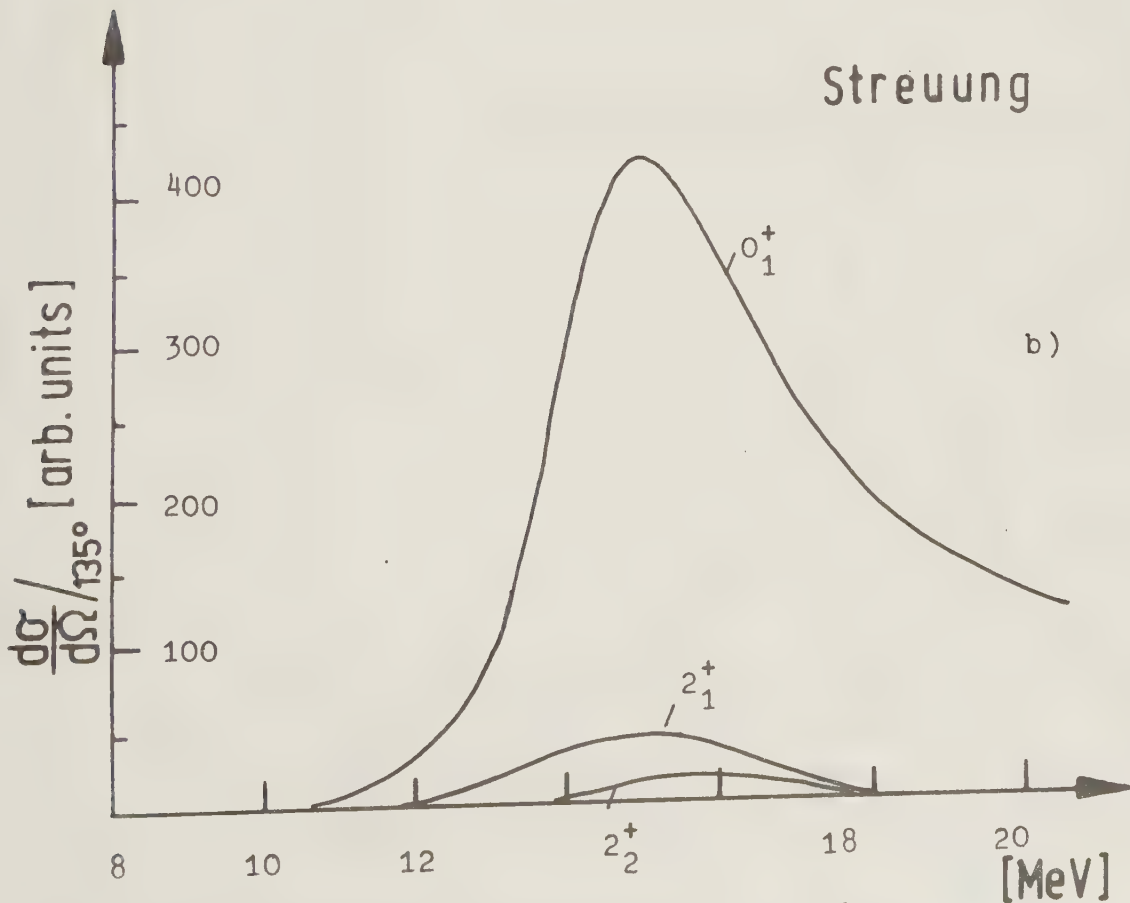
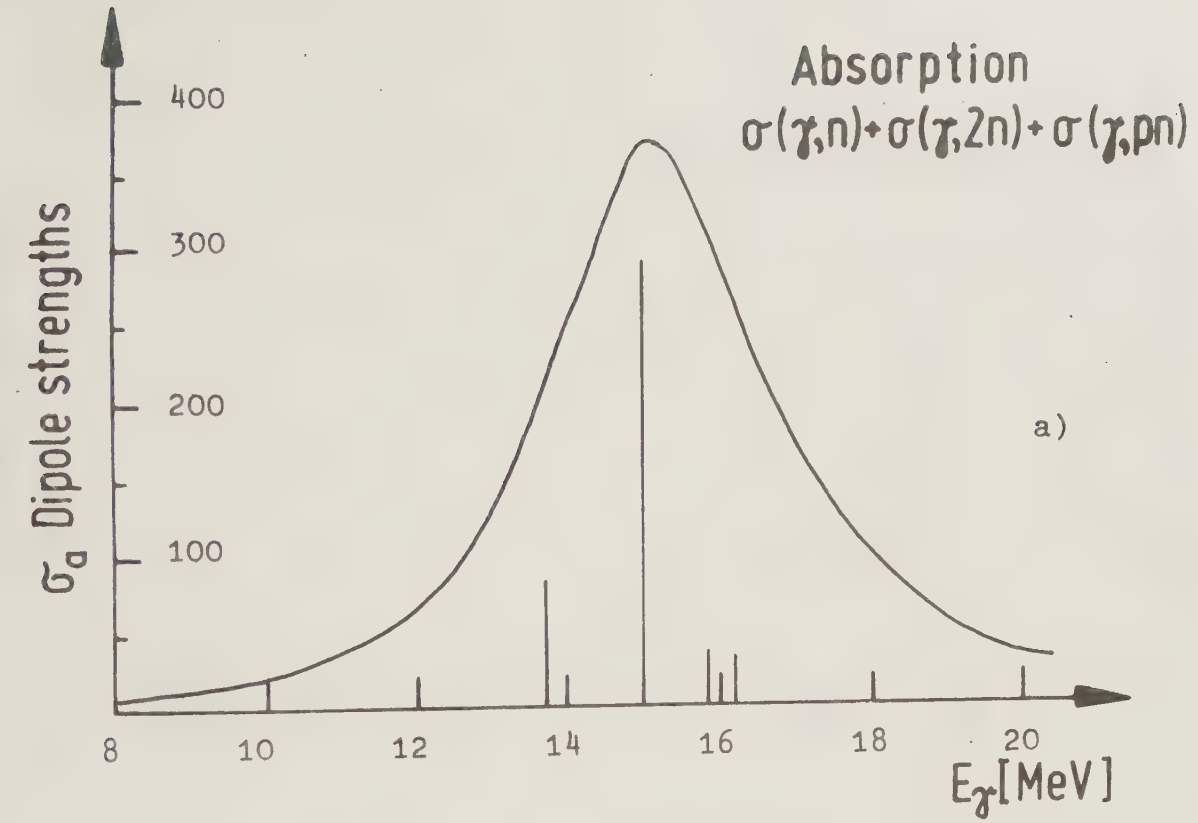


Fig. 46a E1-Absorptionsquerschnitt von ^{146}Sm
 Fig. 46b E1-Streuquerschnitte von ^{146}Sm

Fig. 46

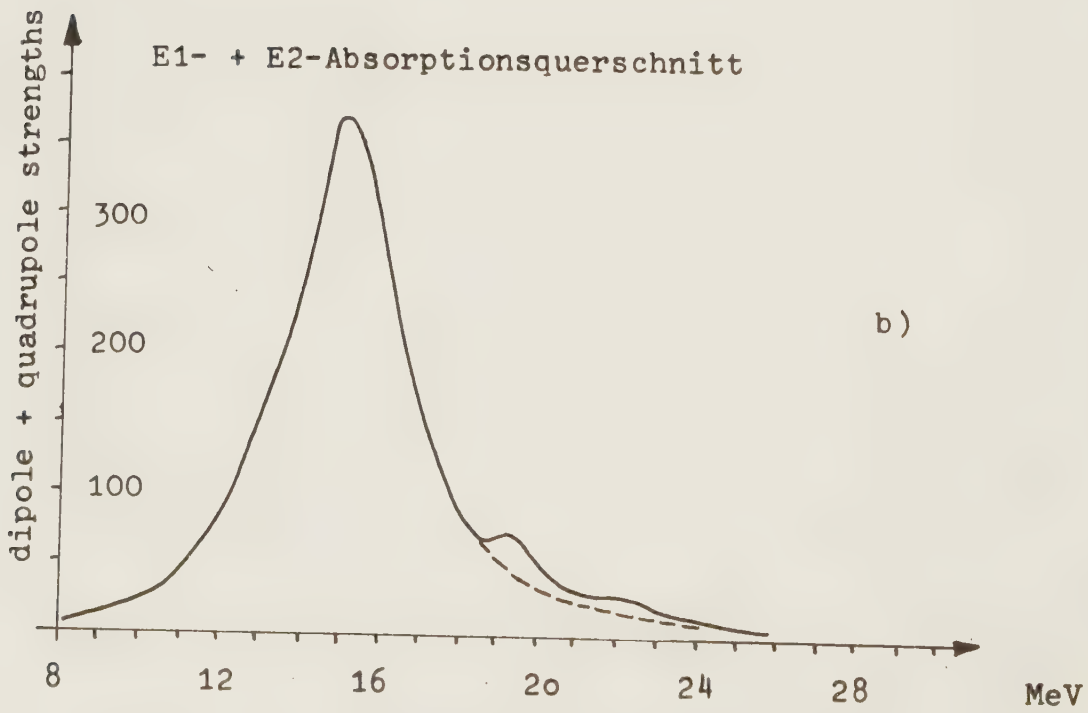
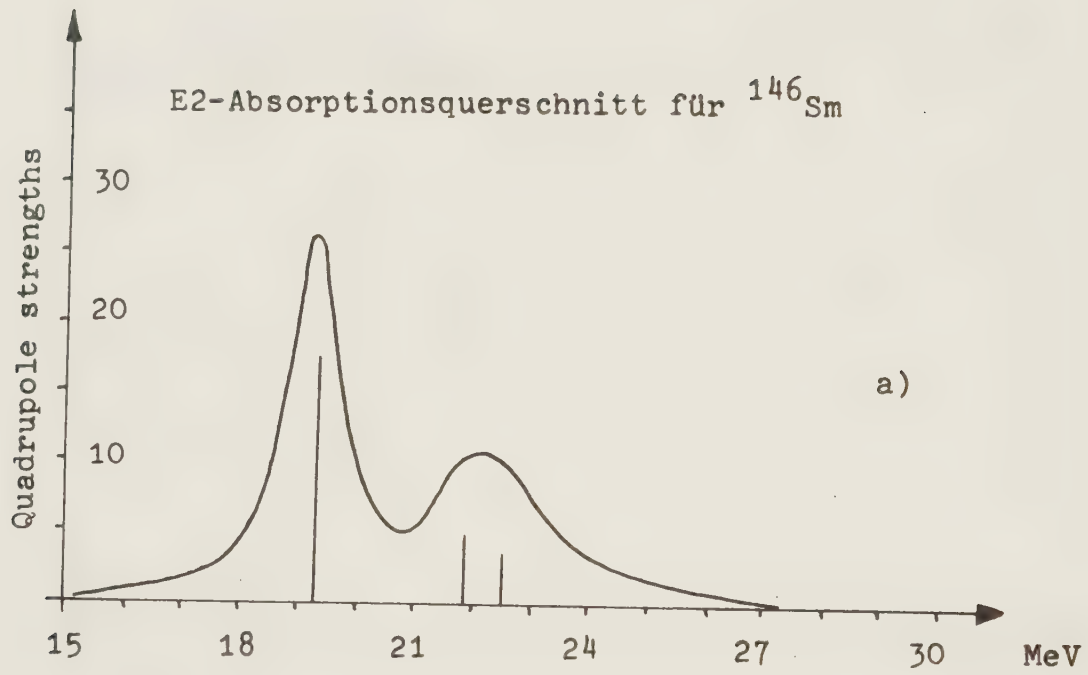


Fig. 47

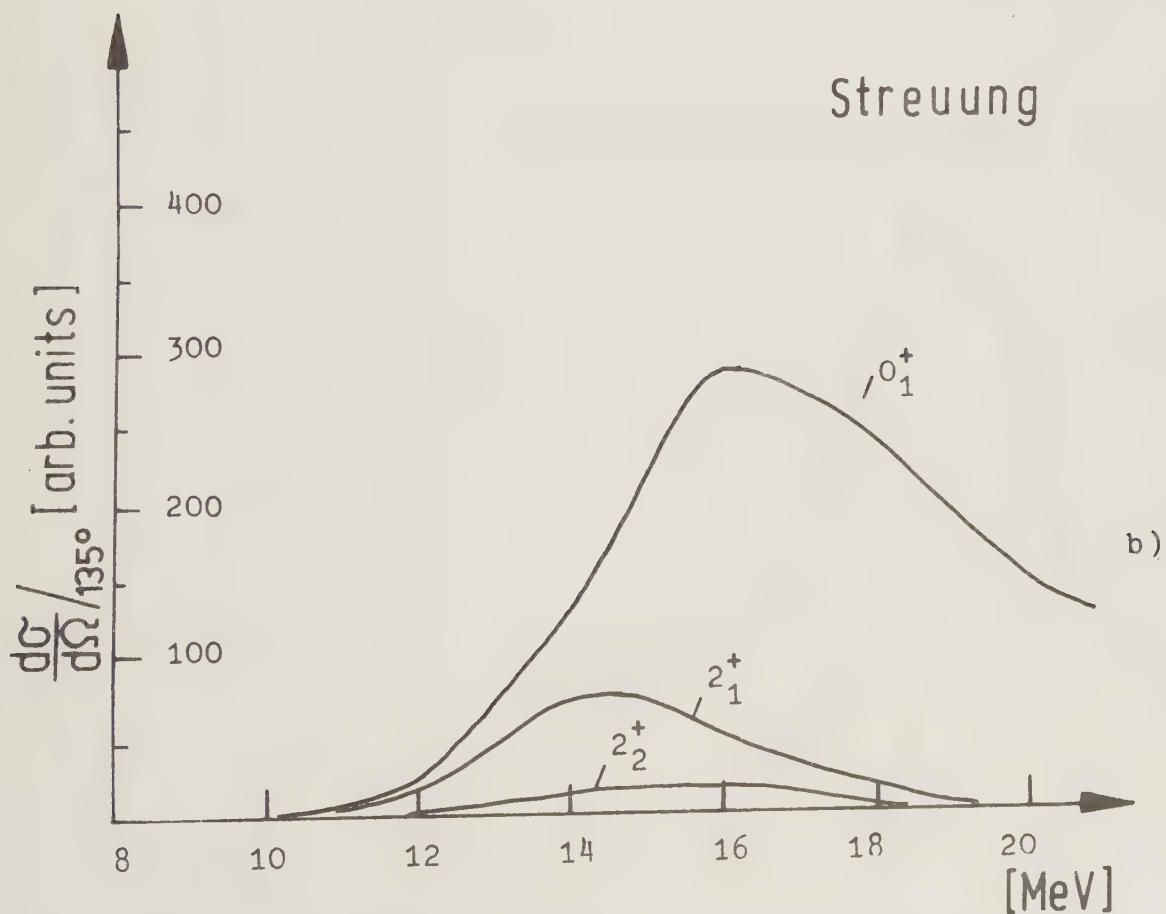
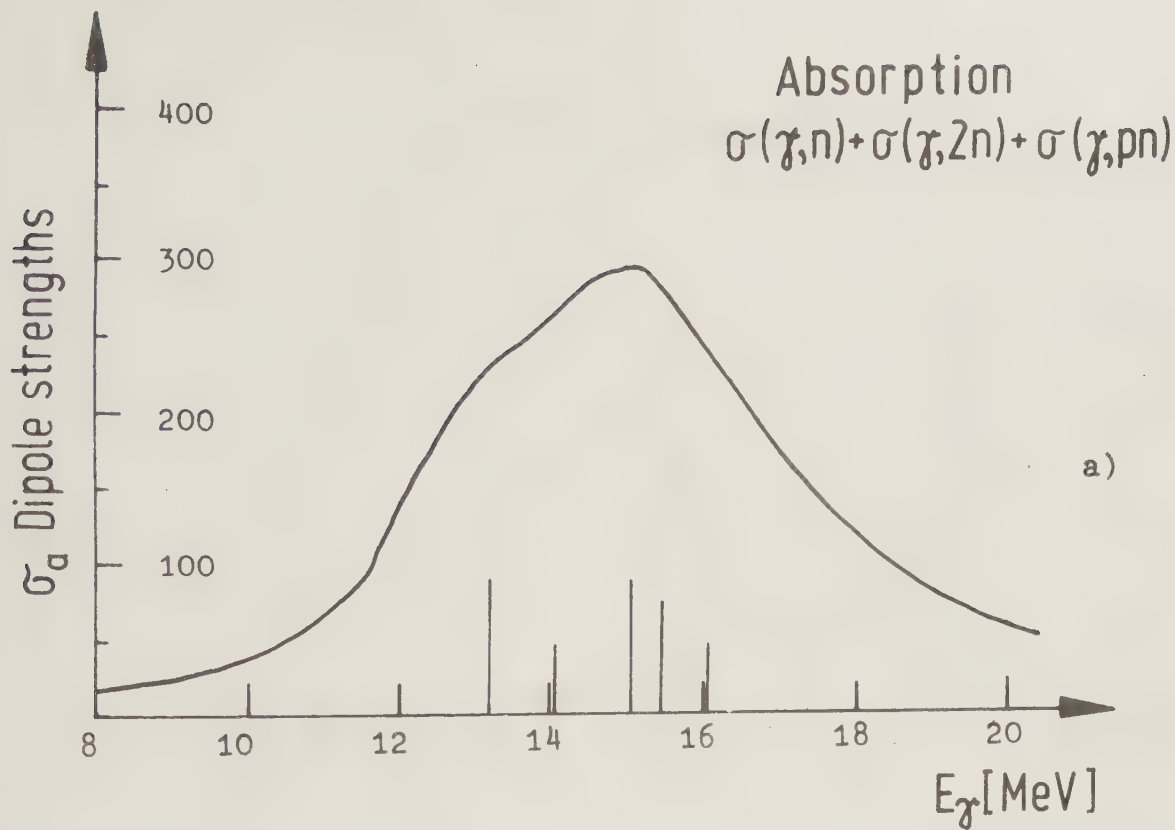


Fig. 48a E1-Absorptionsquerschnitt von ^{150}Sm

Fig. 48b E1-Streuquerschnitte von ^{150}Sm

Fig. 48

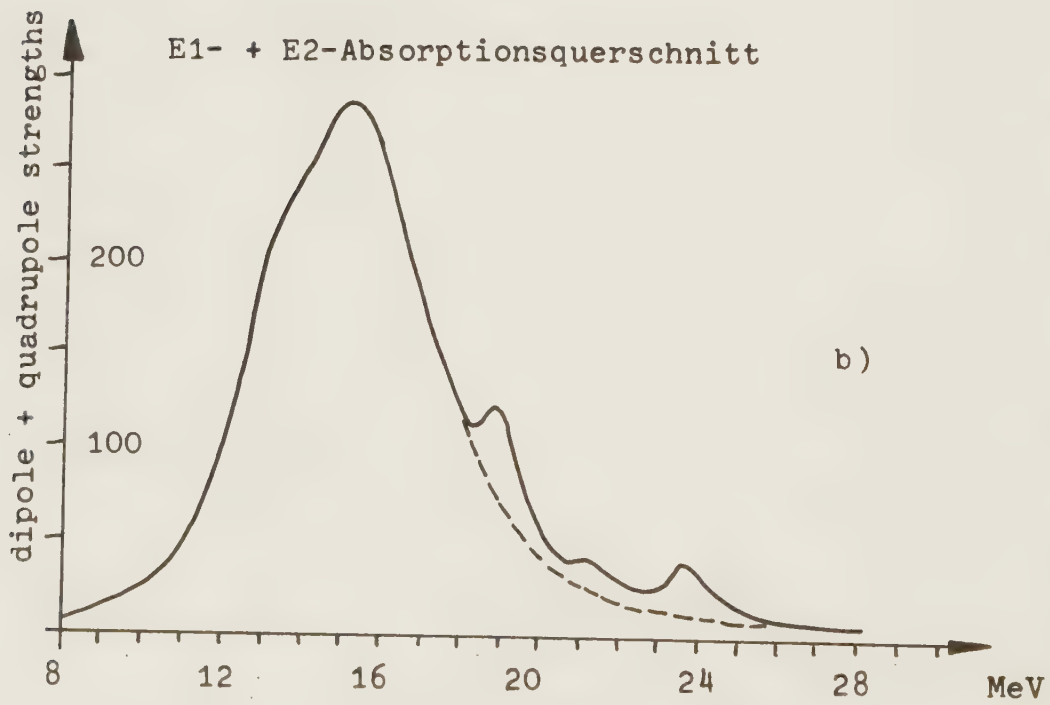
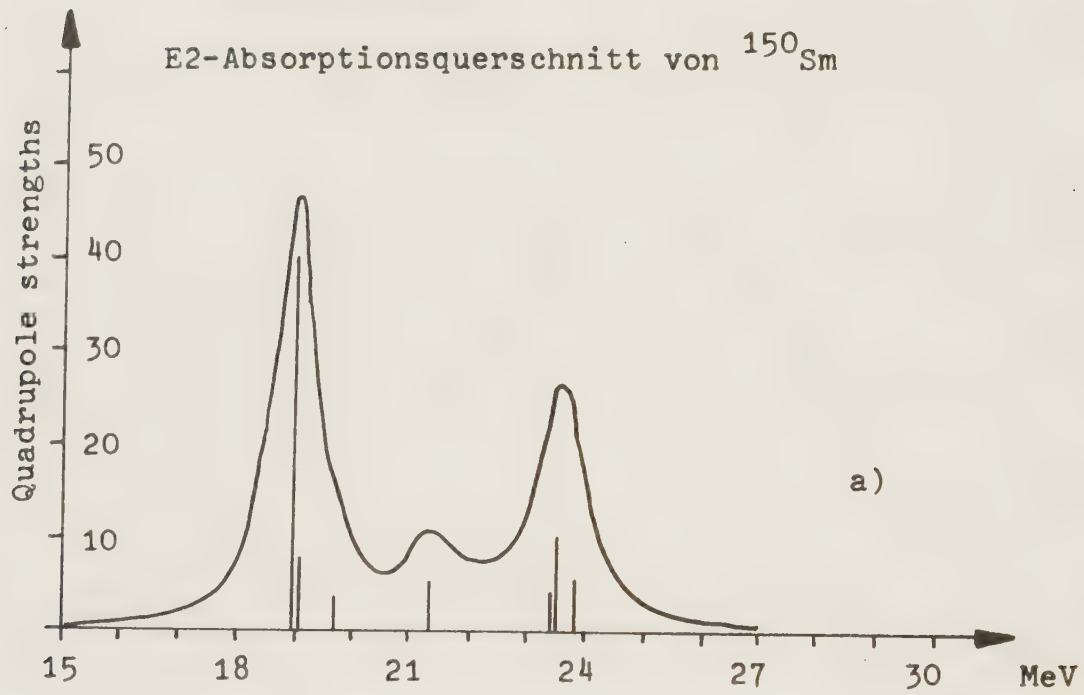


Fig. 49

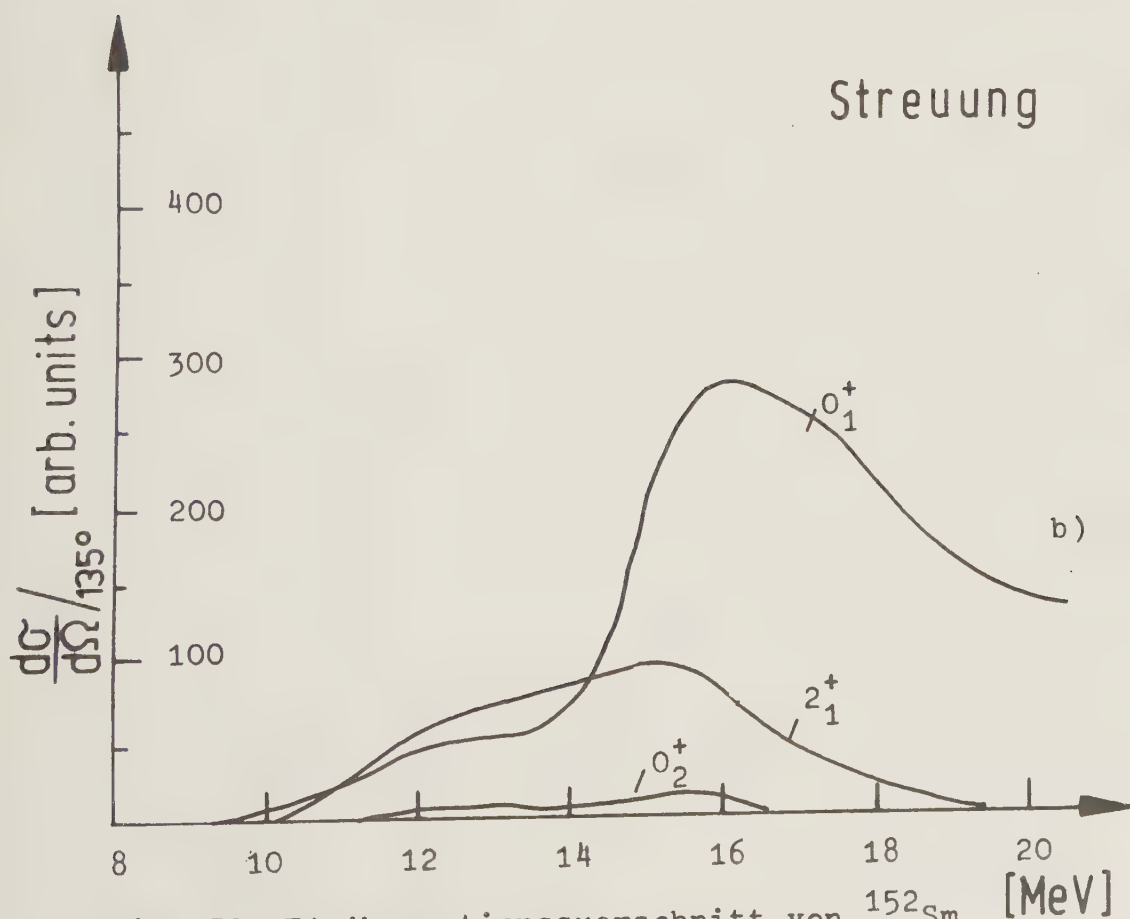
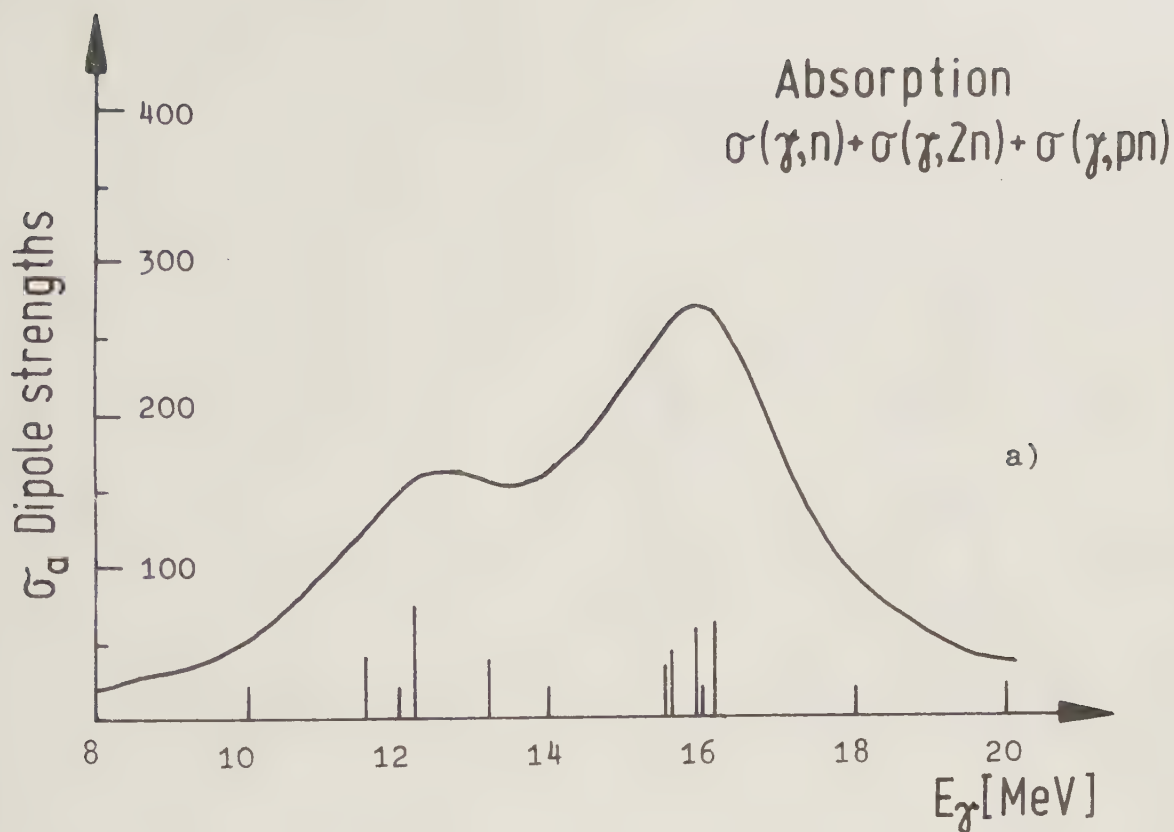


Fig. 50a E1-Absorptionsquerschnitt von ^{152}Sm
 Fig. 50b E1-Streuquerschnitte von ^{152}Sm

Fig. 50

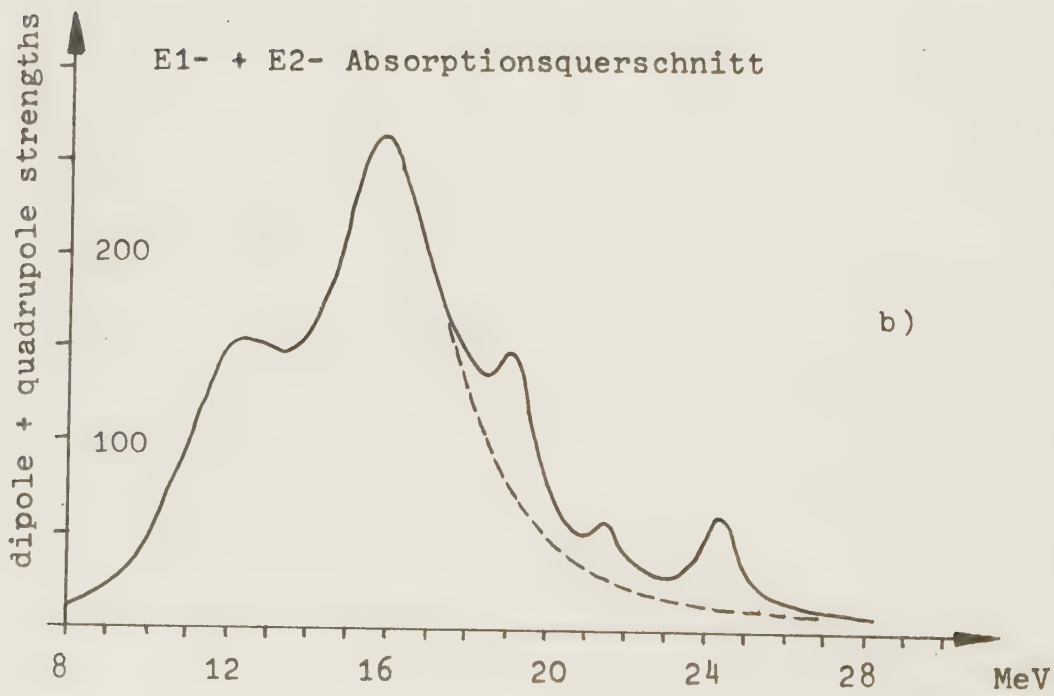
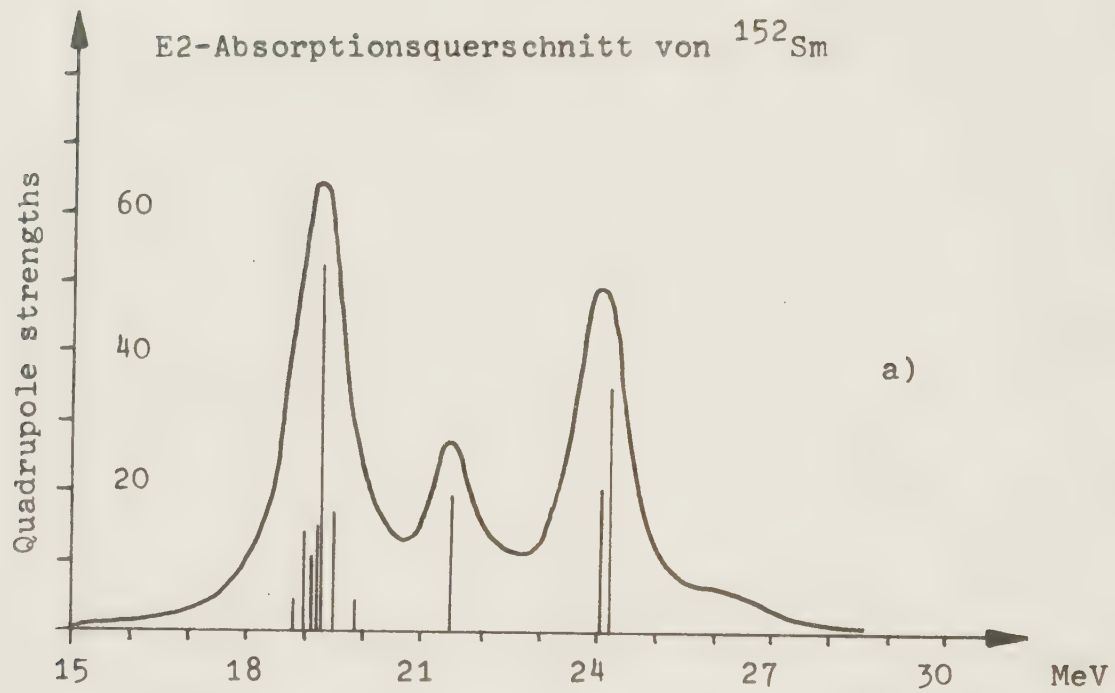


Fig. 51

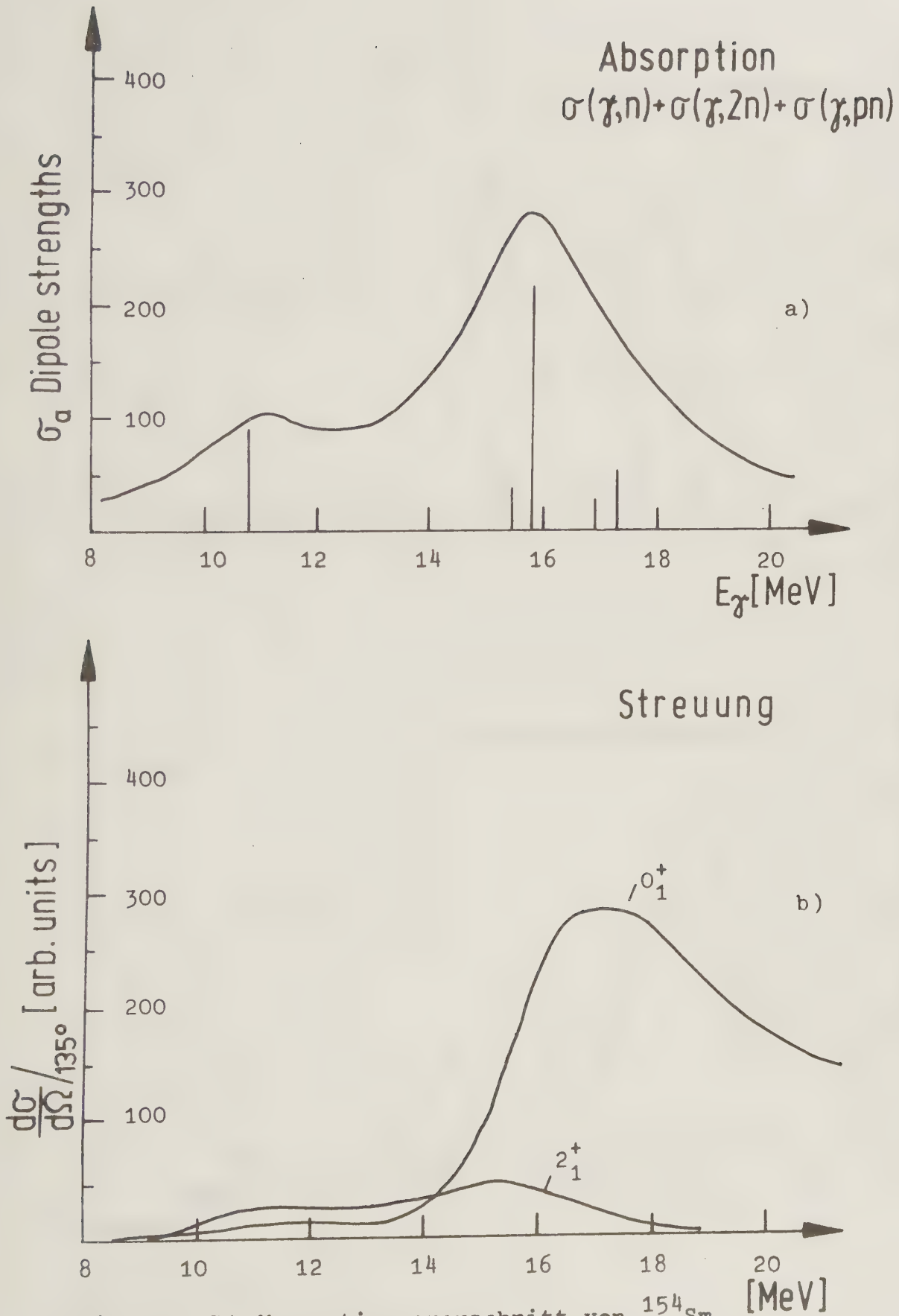


Fig. 52a E1-Absorptionsquerschnitt von ^{154}Sm

Fig. 52b E1-Streuquerschnitte von ^{154}Sm

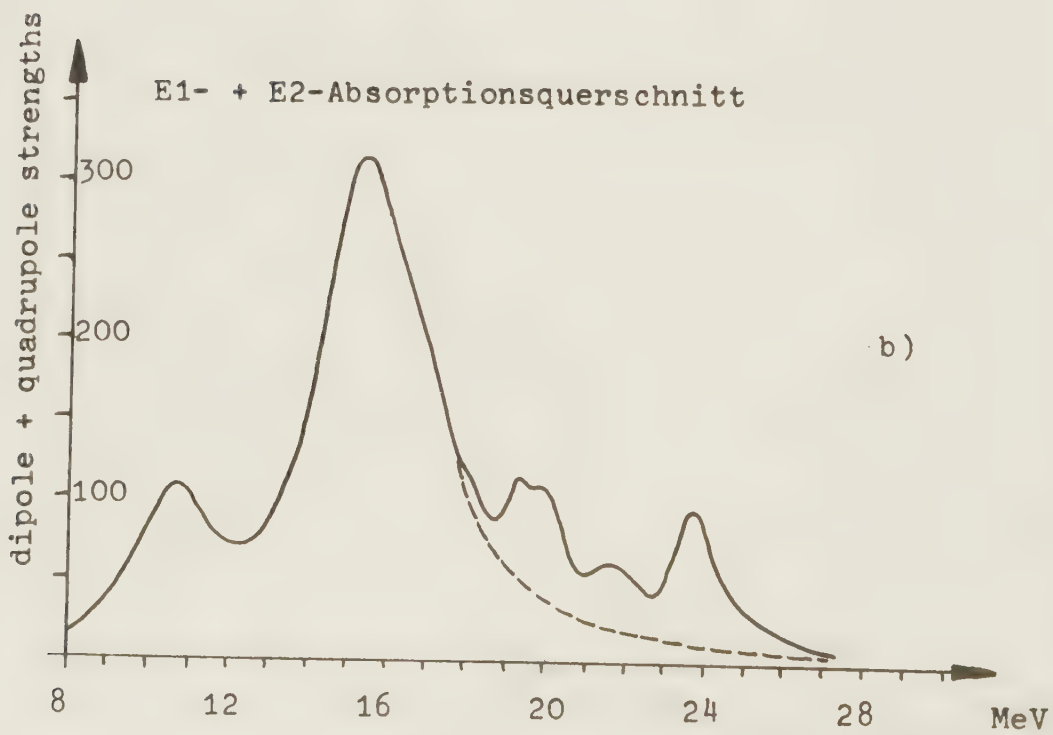
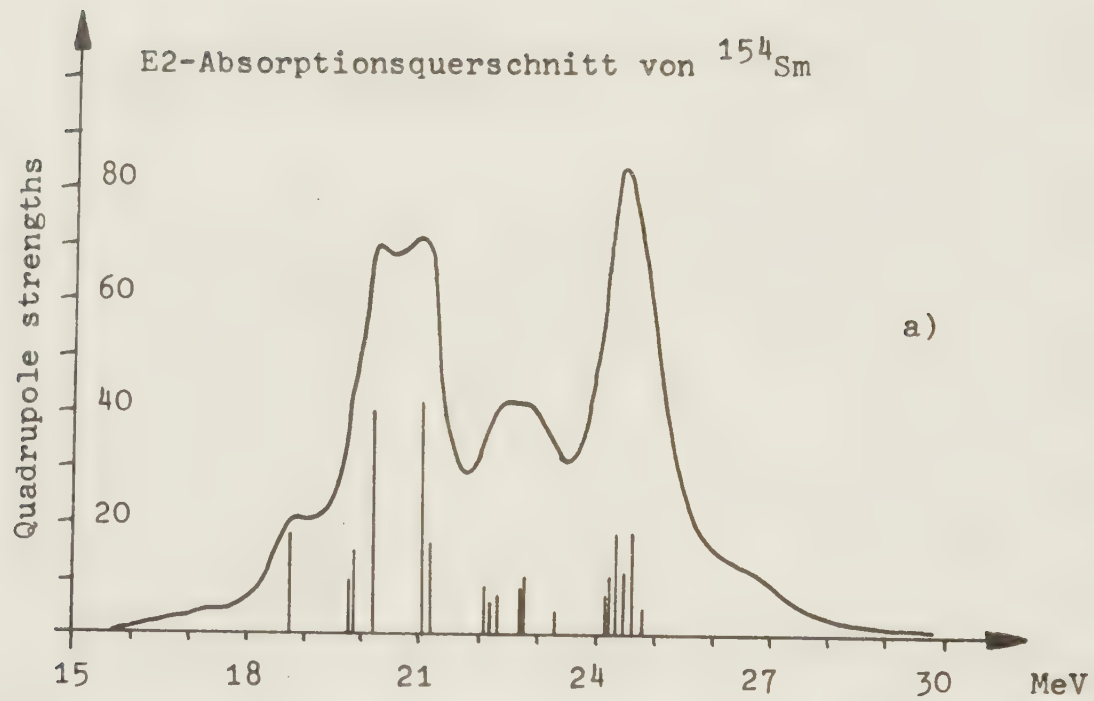


Fig. 53

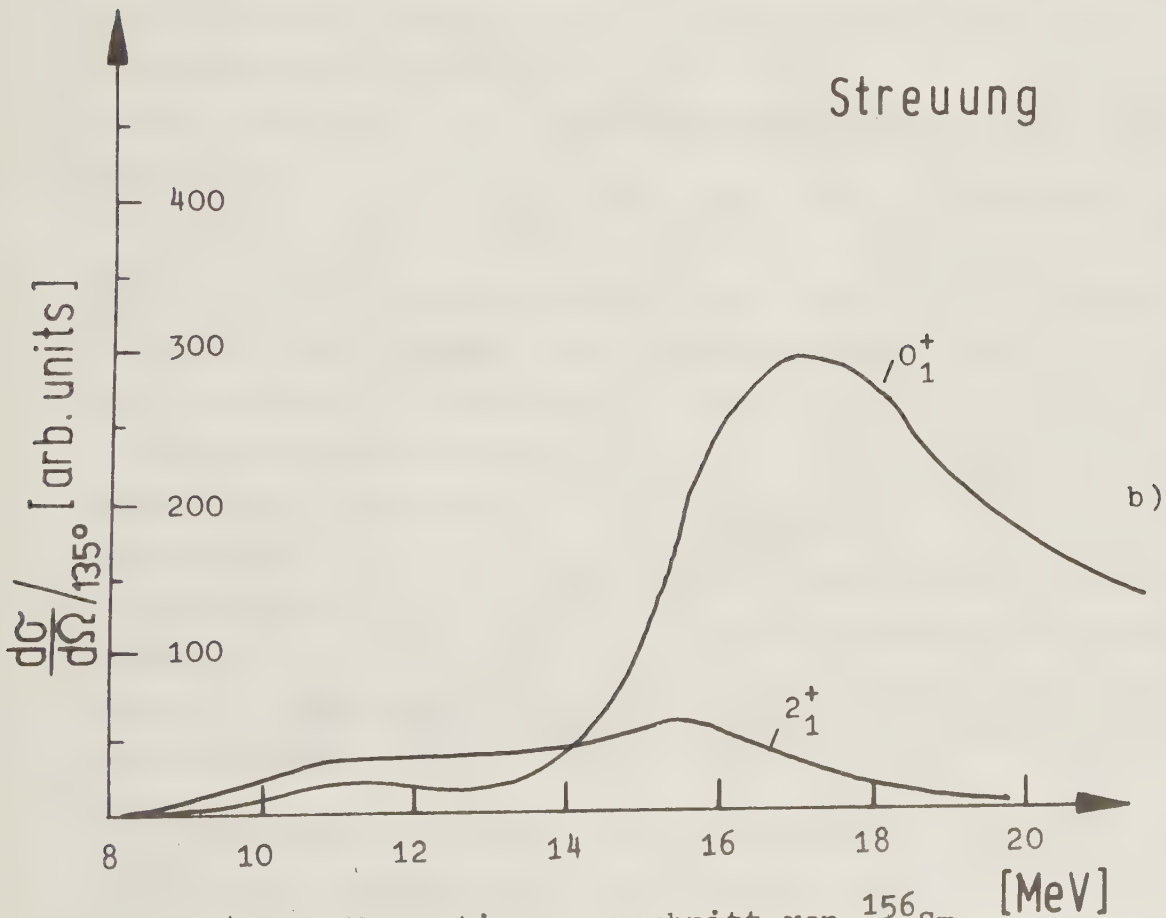
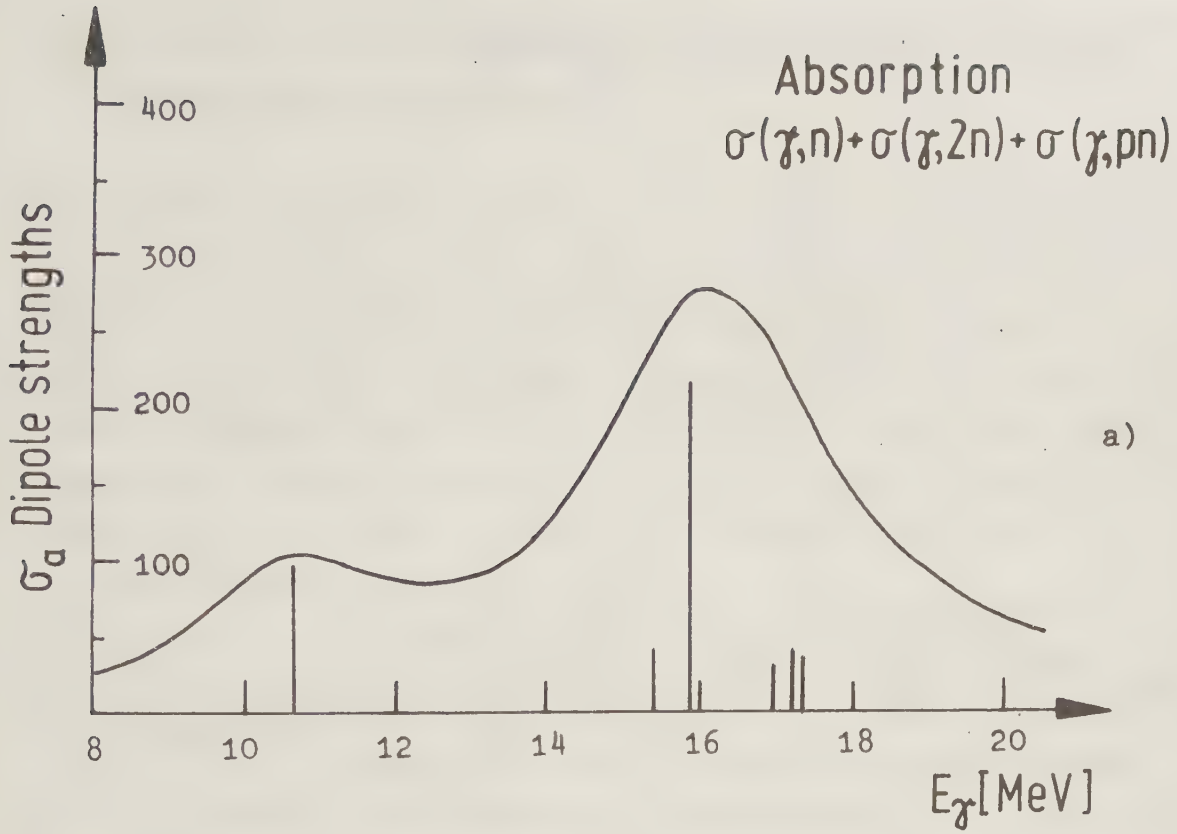


Fig. 54a E1-Absorptionsquerschnitt von ^{156}Sm
 Fig. 54b E1-Streuquerschnitte von ^{156}Sm

Fig. 54

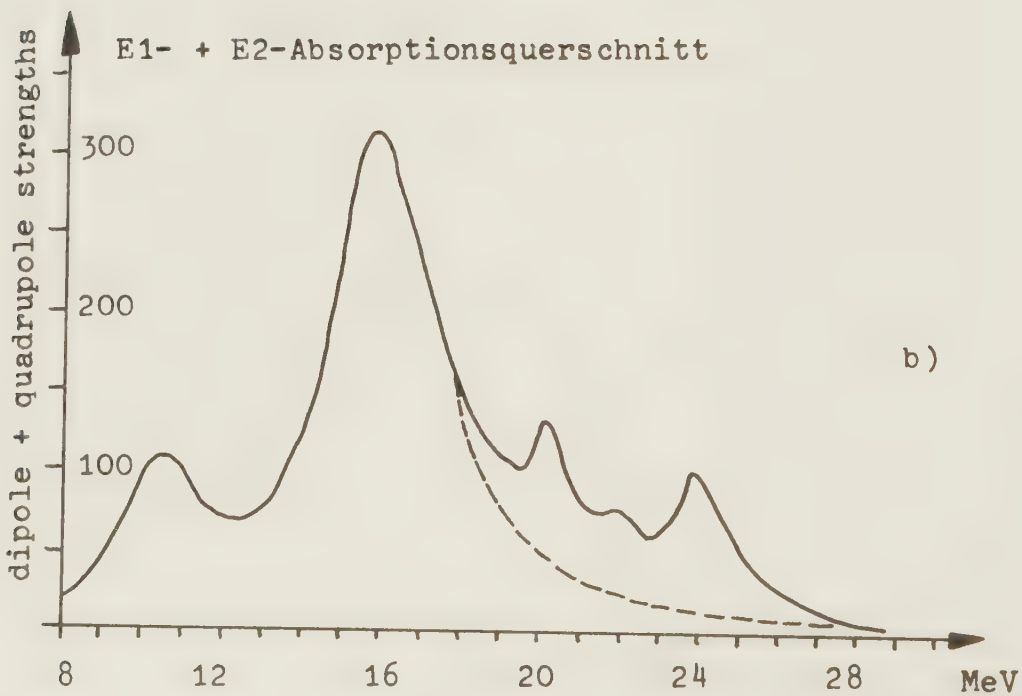
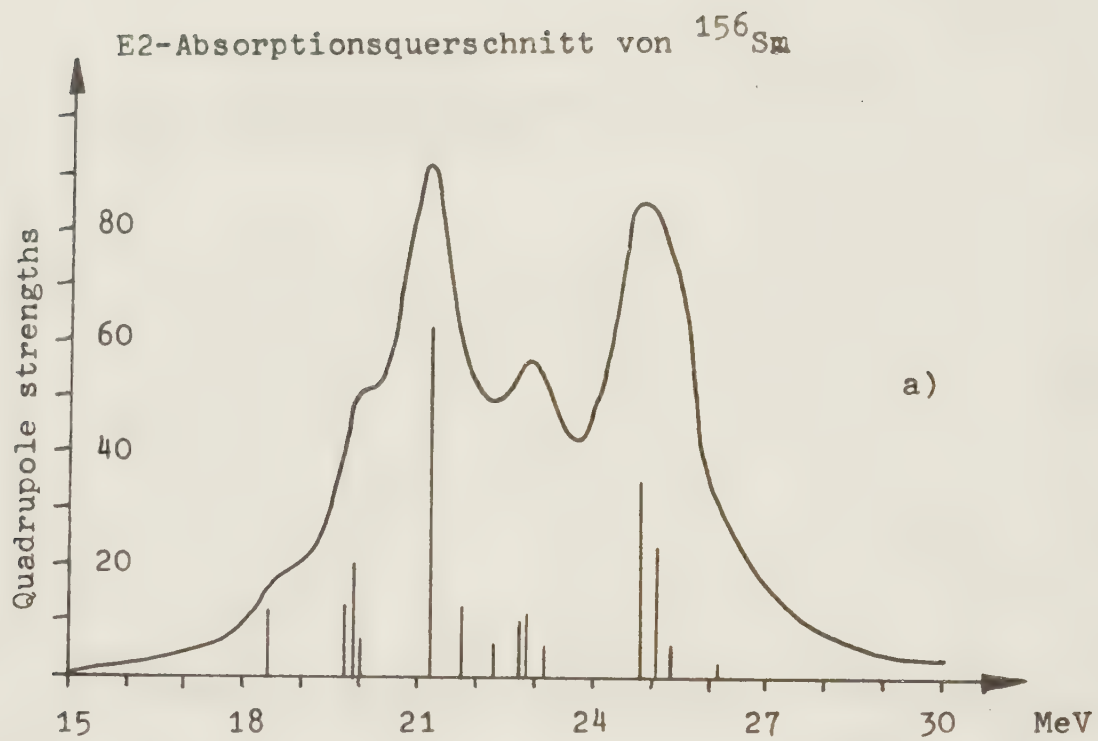


Fig. 55

5.4 Übergang vom anharmonischen Vibrator zum asymmetrischen Kreisel am Beispiel der Ru-Isotope

Die Potentialenergieflächen in Fig. 56 und 57 zeigen einen Übergang von einem Kern mit sphärischem Grundzustand und einem zweiten Minimum auf der prolaten Achse über Rotationskerne, die in γ -Richtung immer weicher werden, zu einem asymmetrischen Kreisel.

Entsprechend dem sphärischen Grundzustand von ^{94}Ru zeigt der E1-Absorptionsquerschnitt in Fig. 58a ($T_D = 2.5$ MeV) eine dominante Dipolstärke. Ebenso typisch ist der E2-Absorptionsquerschnitt in Fig. 59a ($T_Q = 1.0$ MeV). Die Fig. 59b zeigt die addierten E1- und E2-Absorptionsquerschnitte.

^{98}Ru ist ein anharmonischer Vibrator, bei dem sich auf der prolaten Achse jedoch Rotationseigenschaften erkennen lassen. Der E1-Absorptionsquerschnitt in Fig. 60a ($T_D = 2.5$ MeV) zeigt die Aufspaltung der Dipolstärken, wie man es für einen anharmonischen Vibrator erwarten würde. Der E2-Absorptionsquerschnitt ($T_Q = 0.7$ MeV) gibt in der Aufspaltung der Kurve in drei dominante Peaks die Rotationseigenschaften des Kerns wieder (Fig. 61a).

Die Fig. 61b zeigt den Verlauf der addierten E1- und E2-Absorptionsquerschnitte.

Die nächsten beiden Kerne ^{104}Ru und ^{106}Ru sind prolate Rotatoren, die sehr weich in γ -Richtung sind.

Die E1-Absorptionsquerschnitte ($T_D = 2.5$ MeV) in Fig. 62a und Fig. 64a zeigen im Kurvenverlauf zwei dominante Peaks, was dem prolaten Rotationscharakter entspricht. Die Wechselwirkung zwischen β - und γ -Freiheitsgraden zeigt sich in der Aufspaltung der Dipolstärken. Typisch dafür sind ebenso die starken inelastischen Beiträge der Streuquerschnitte in Fig. 62b und Fig. 64b.

Die Quadrupolriesenresonanzen ($T_Q = 0.7$ MeV) in Fig. 63a und Fig. 65a zeigen in der Aufspaltung der Quadrupolstärken in viele Linien den starken Einfluß der γ -Freiheitsgrade. Hier ist deutlich die beginnende Aufhebung der Entartung entlang der Schwingungsachsen zu sehen.

In den Figuren 63b und 65b sind die addierten E1- und E2-Absorptionsquerschnitte dargestellt, wobei die gestrichelte Kurve den Anteil

der E1-Resonanzen kennzeichnet.

^{108}Ru ist ein Kern mit einem Minimum im asymmetrischen Bereich.

Die Aufspaltung der Dipolriesenresonanzen in drei dominante Dipolstärken, gemäß den Schwingungen in Richtung der drei Kernachsen, ist in Fig. 66a zu erkennen. Ebenso zeigt die elastische Kurve eine deutliche Aufspaltung in drei Peaks (Fig. 66b).

Die E2-Riesenresonanzen spalten in fünf dominante Peaks auf, was in Fig. 67a dargestellt ist.

Die Fig. 67b zeigt den addierten E1- und E2-Absorptionsquerschnitt.

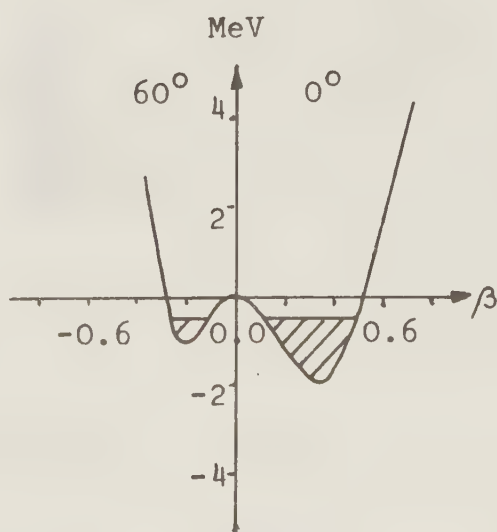
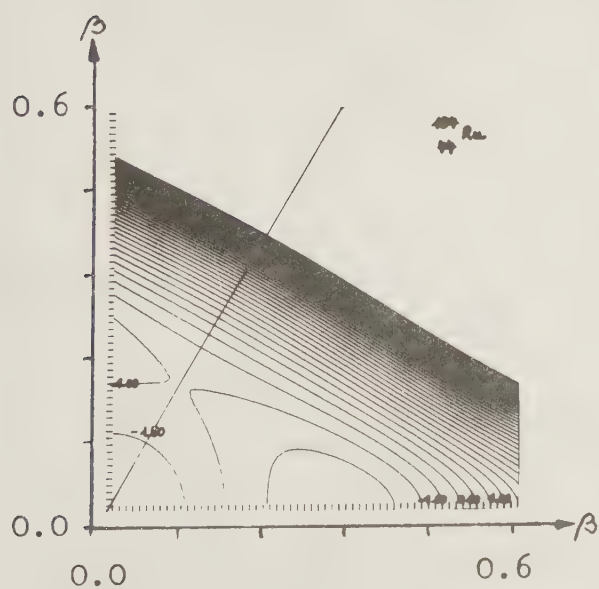
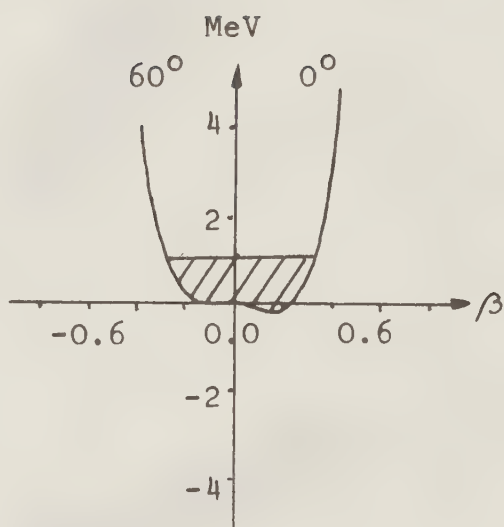
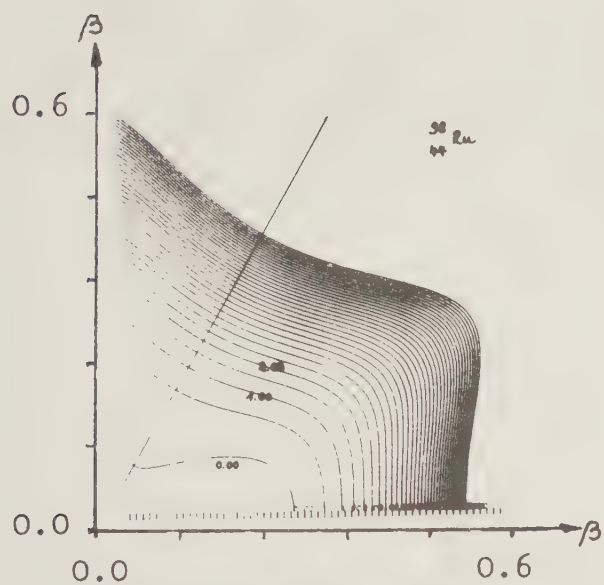
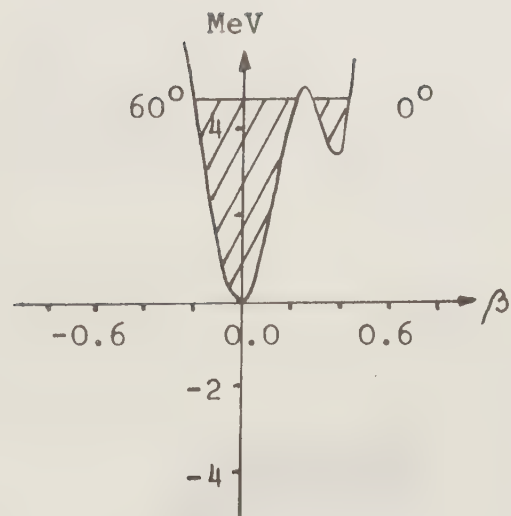
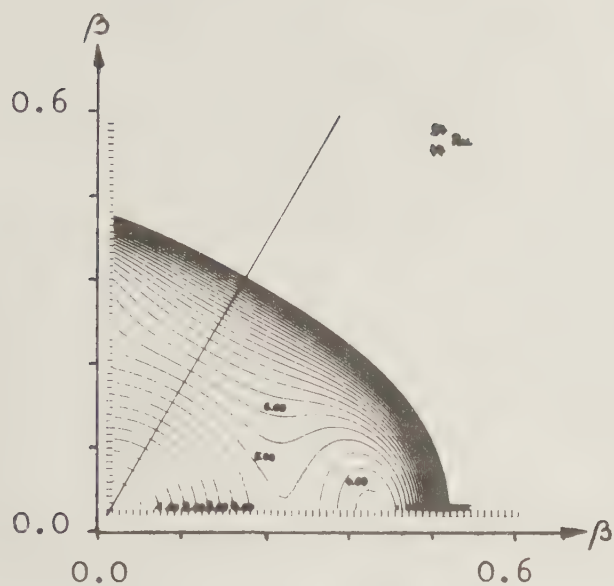


Fig. 56

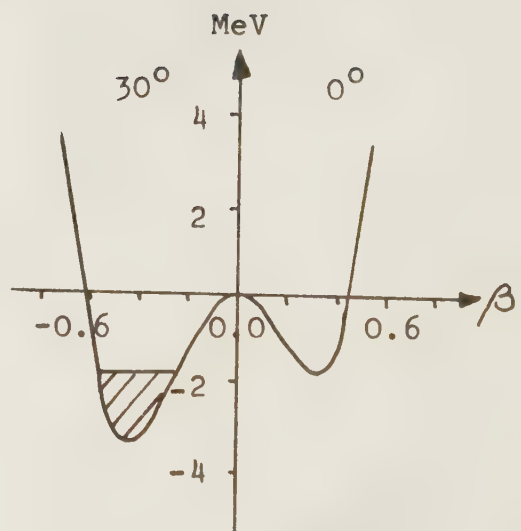
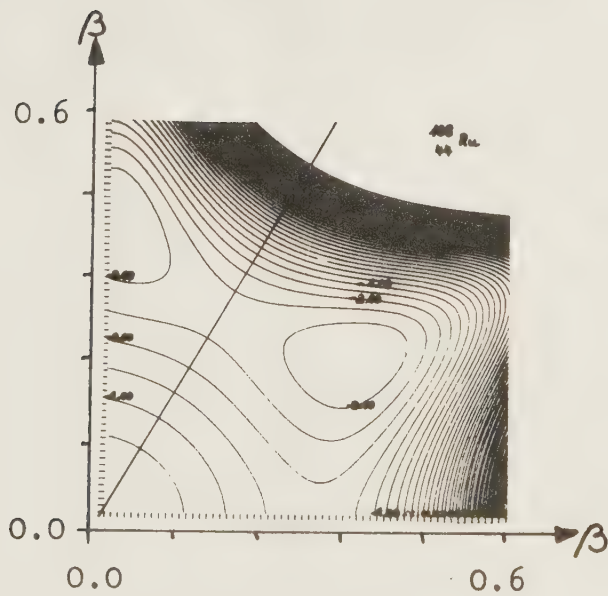
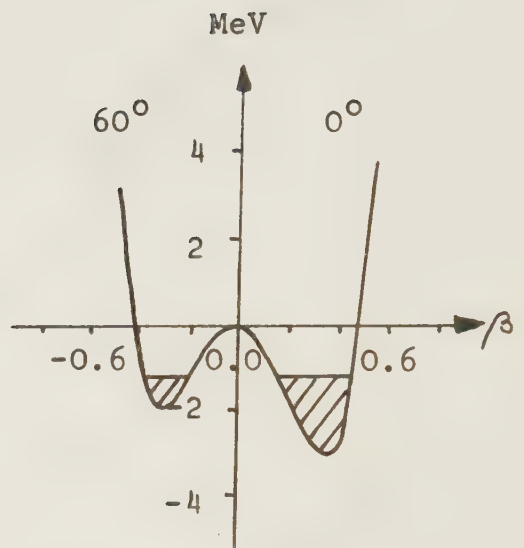
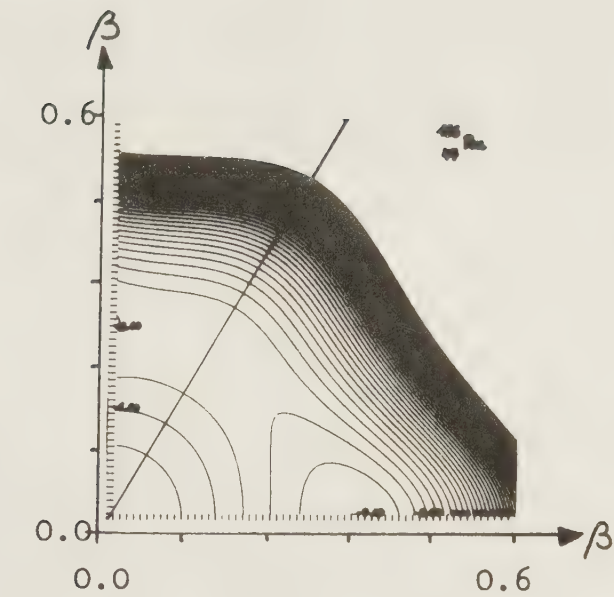


Fig. 57

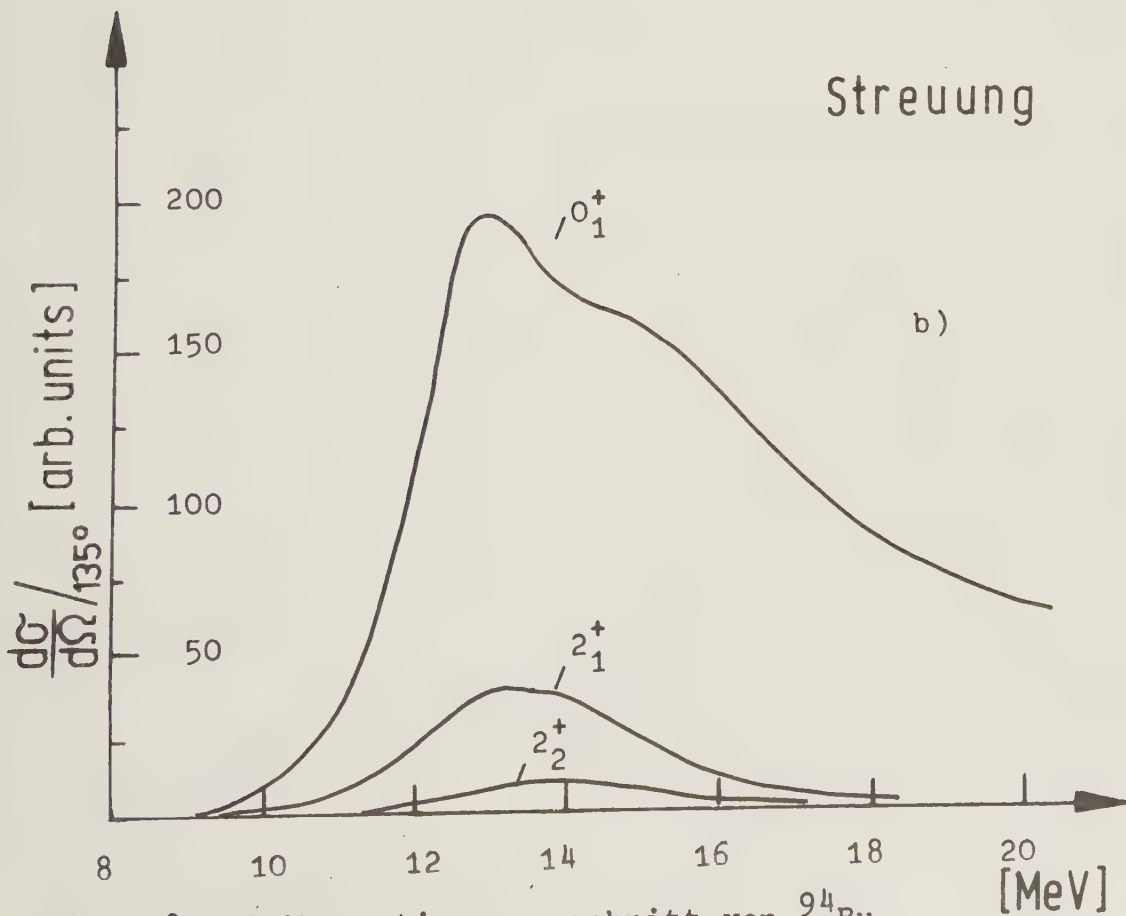
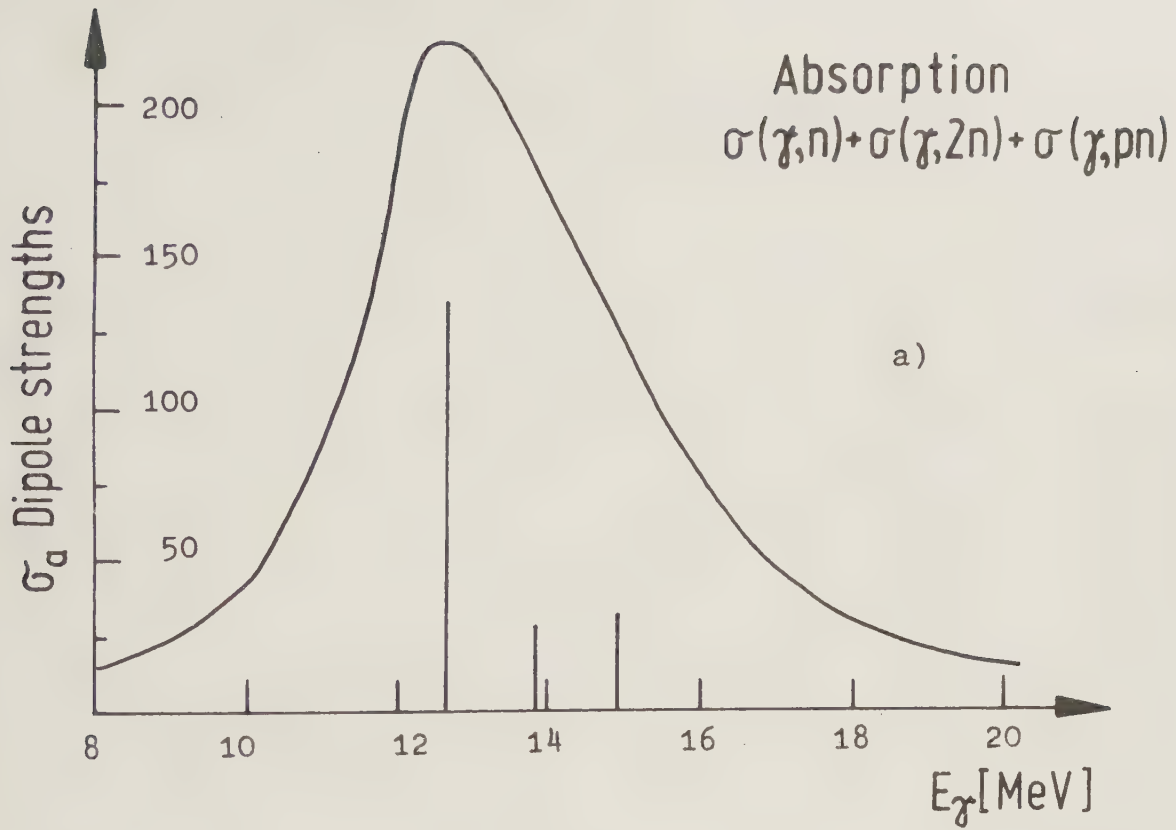


Fig. 58a E1-Absorptionsquerschnitt von ^{94}Ru

Fig. 58b E1-Streuquerschnitte von ^{94}Ru

Fig. 58

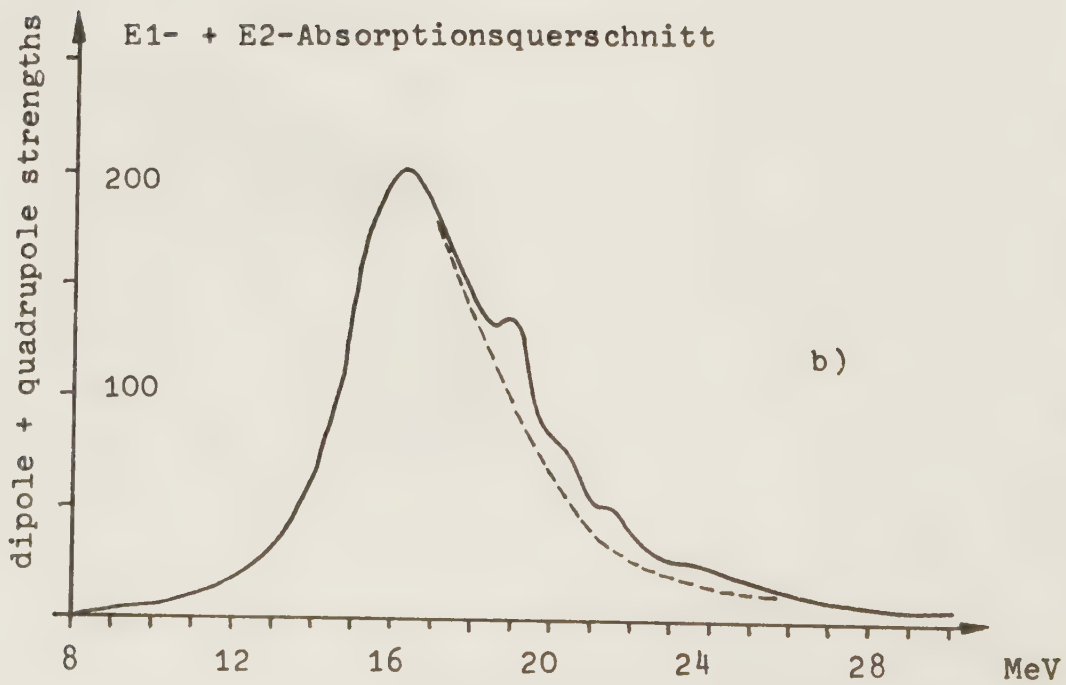
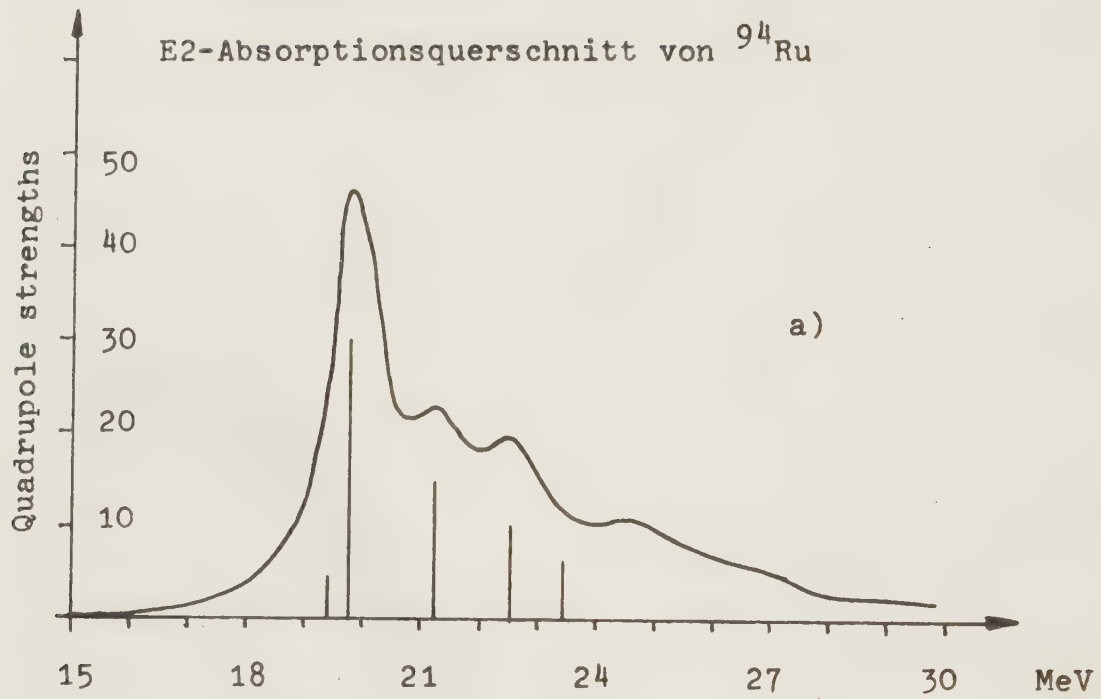


Fig. 59

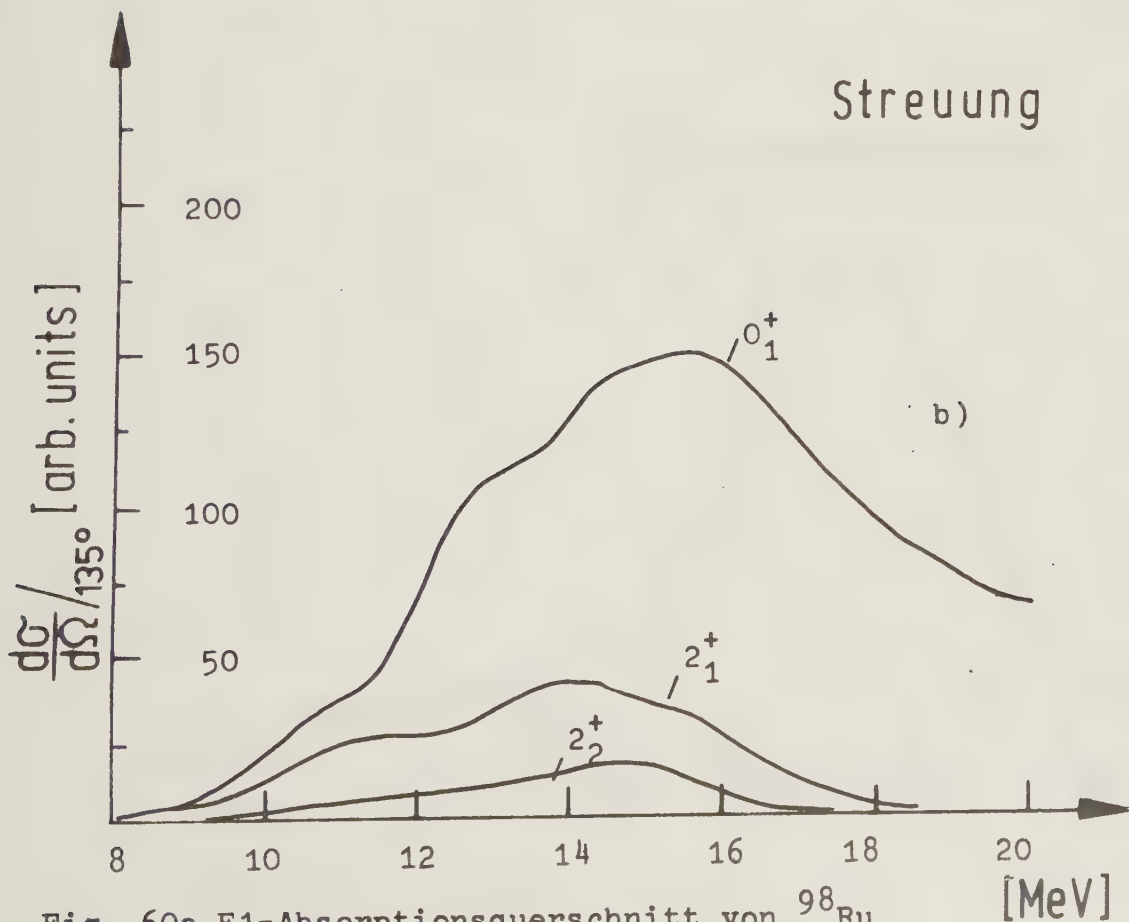
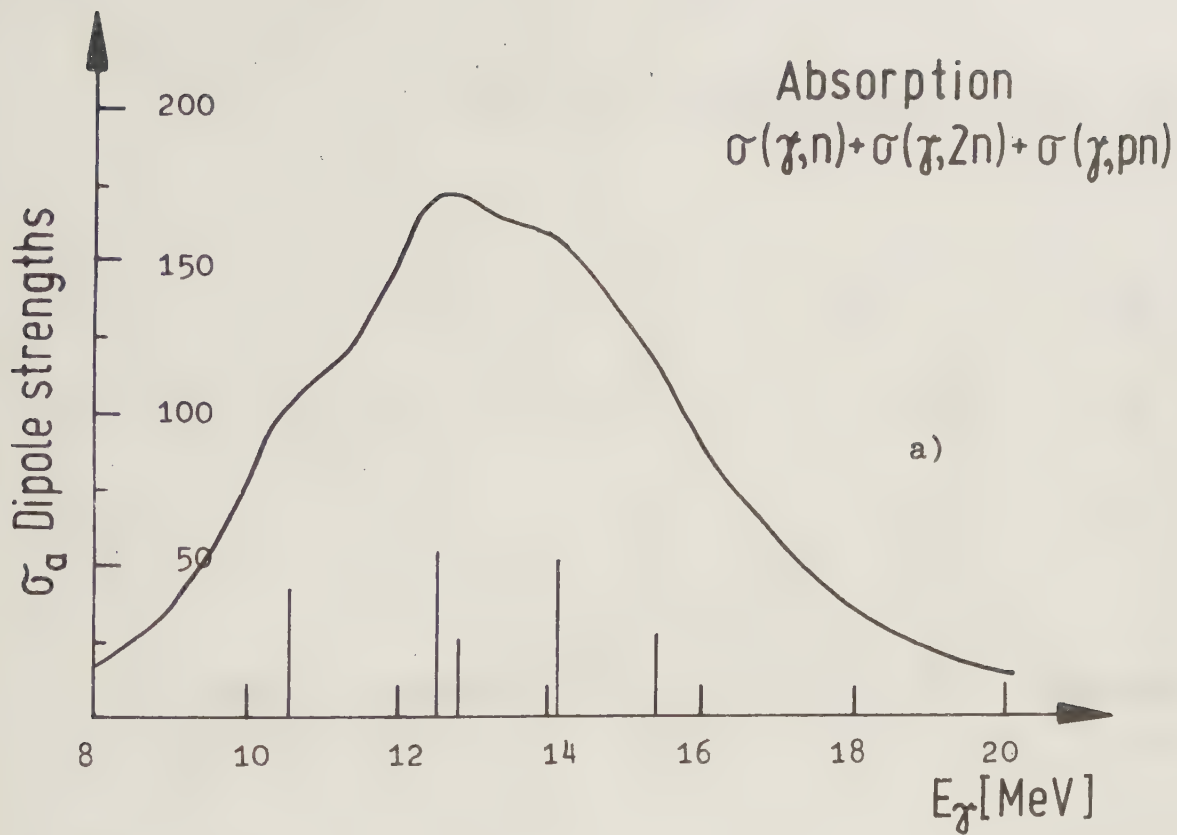


Fig. 60a E1-Absorptionsquerschnitt von ^{98}Ru

Fig. 60b E1-Streuquerschnitte von ^{98}Ru

Fig. 60

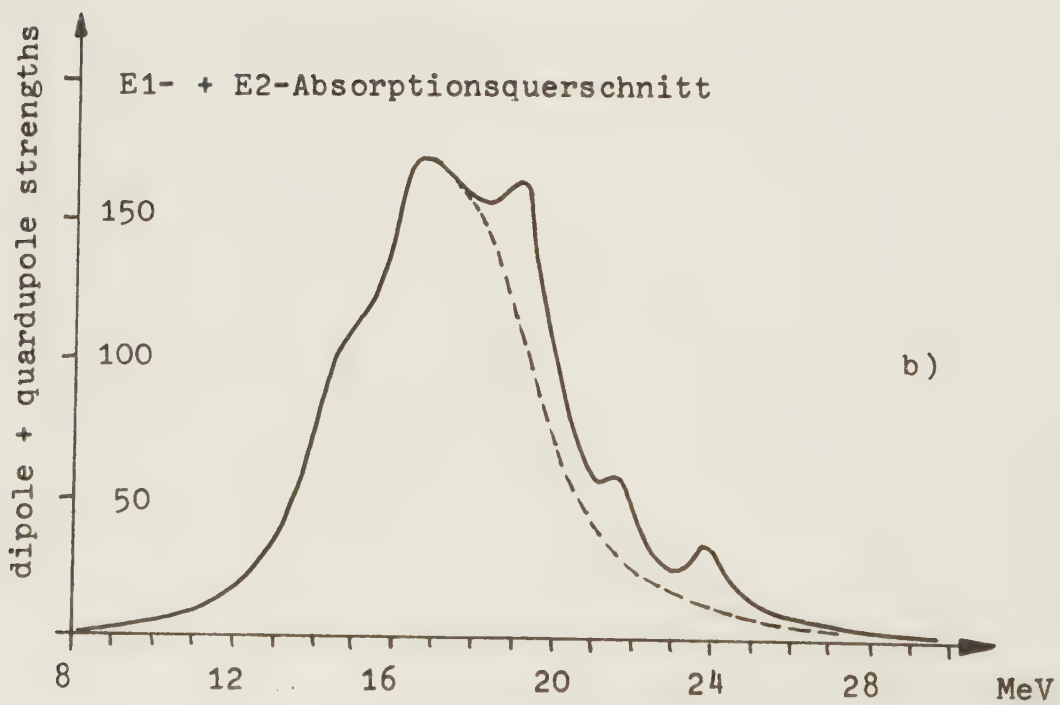
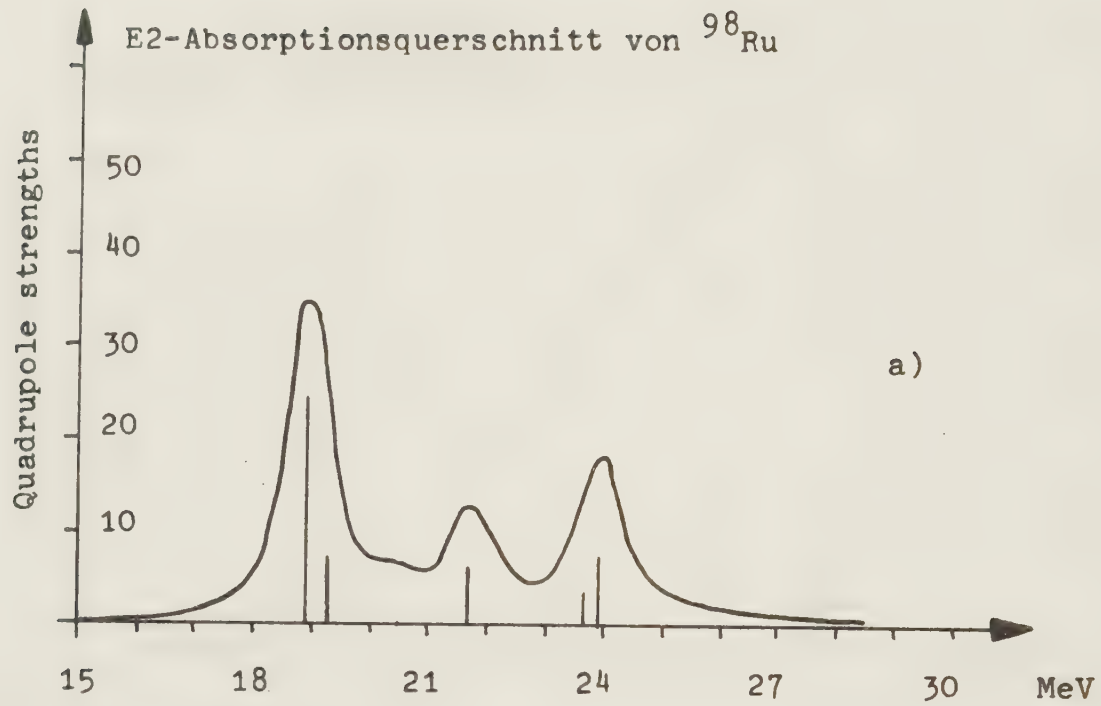


Fig. 61

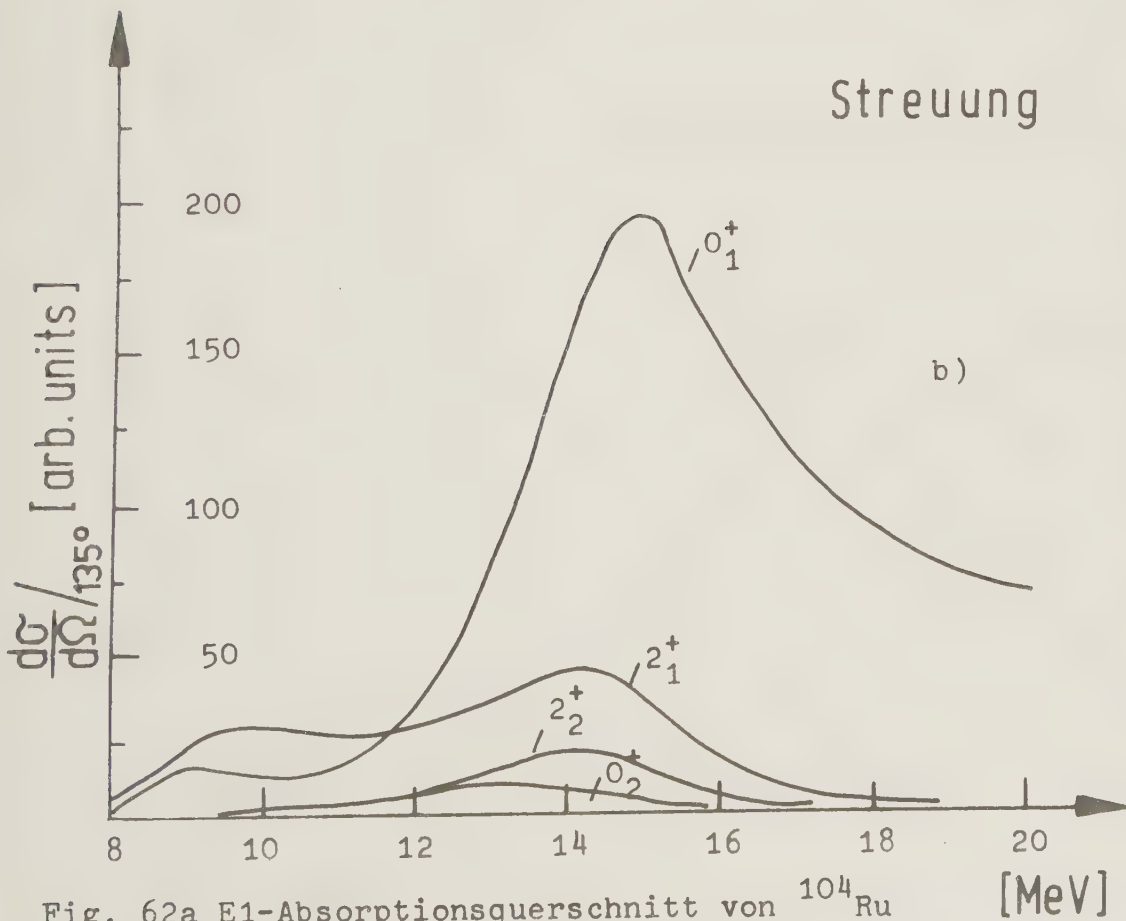
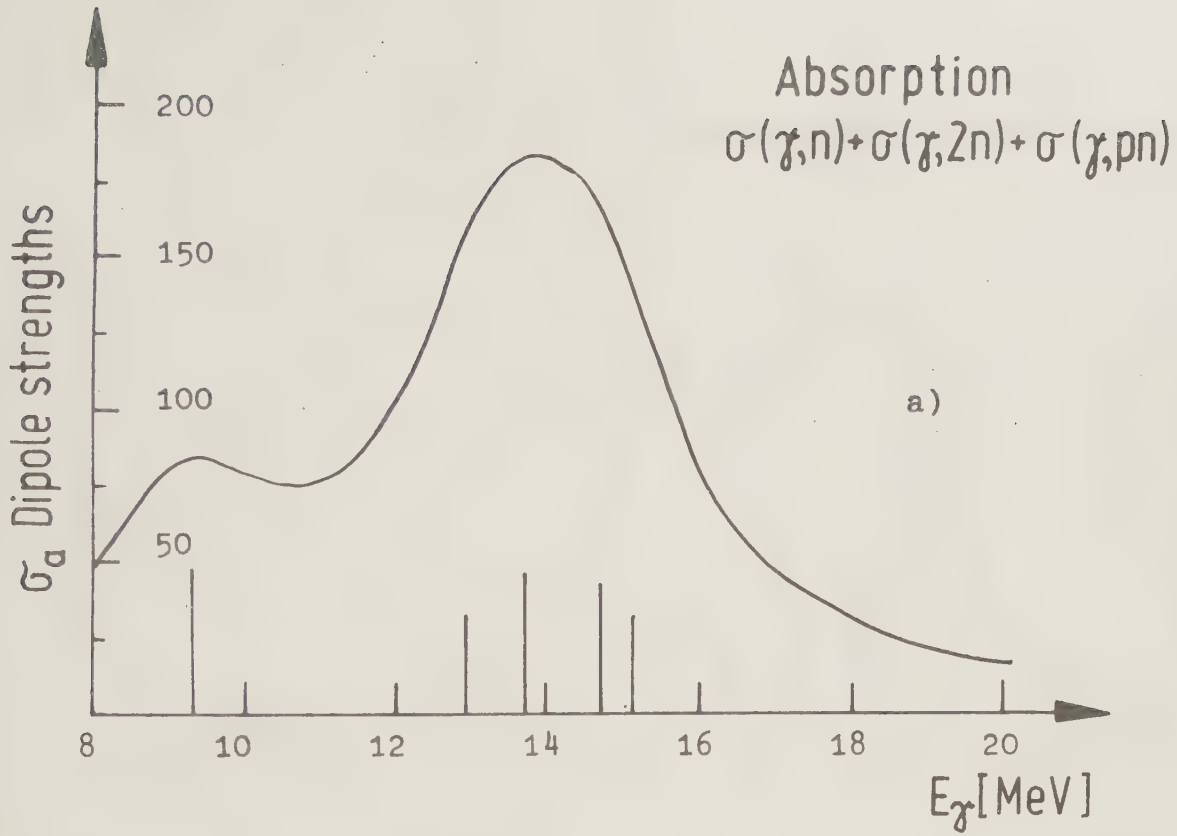


Fig. 62a E1-Absorptionsquerschnitt von ^{104}Ru

Fig. 62b E1-Streuquerschnitte von ^{104}Ru

Fig. 62

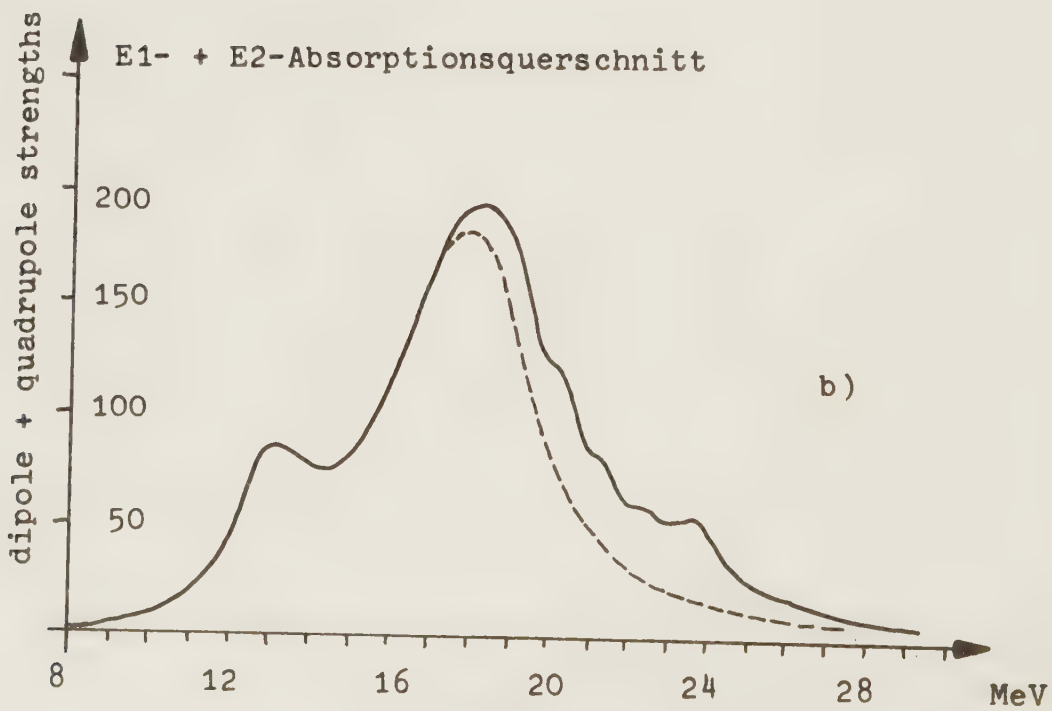
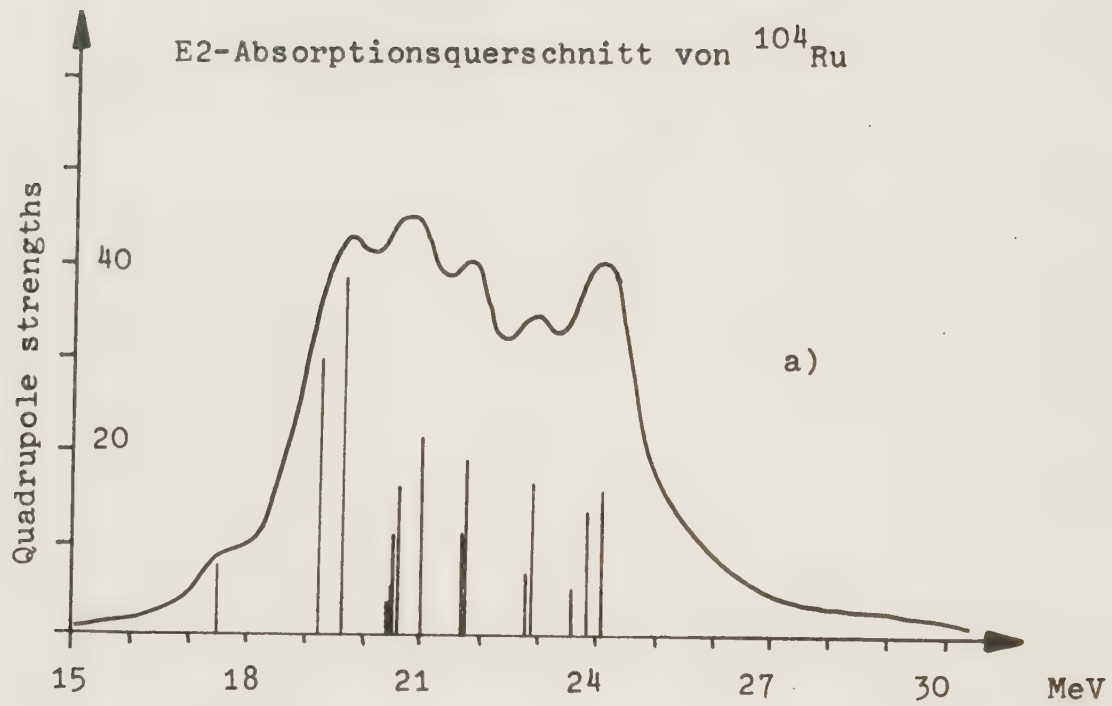


Fig. 63

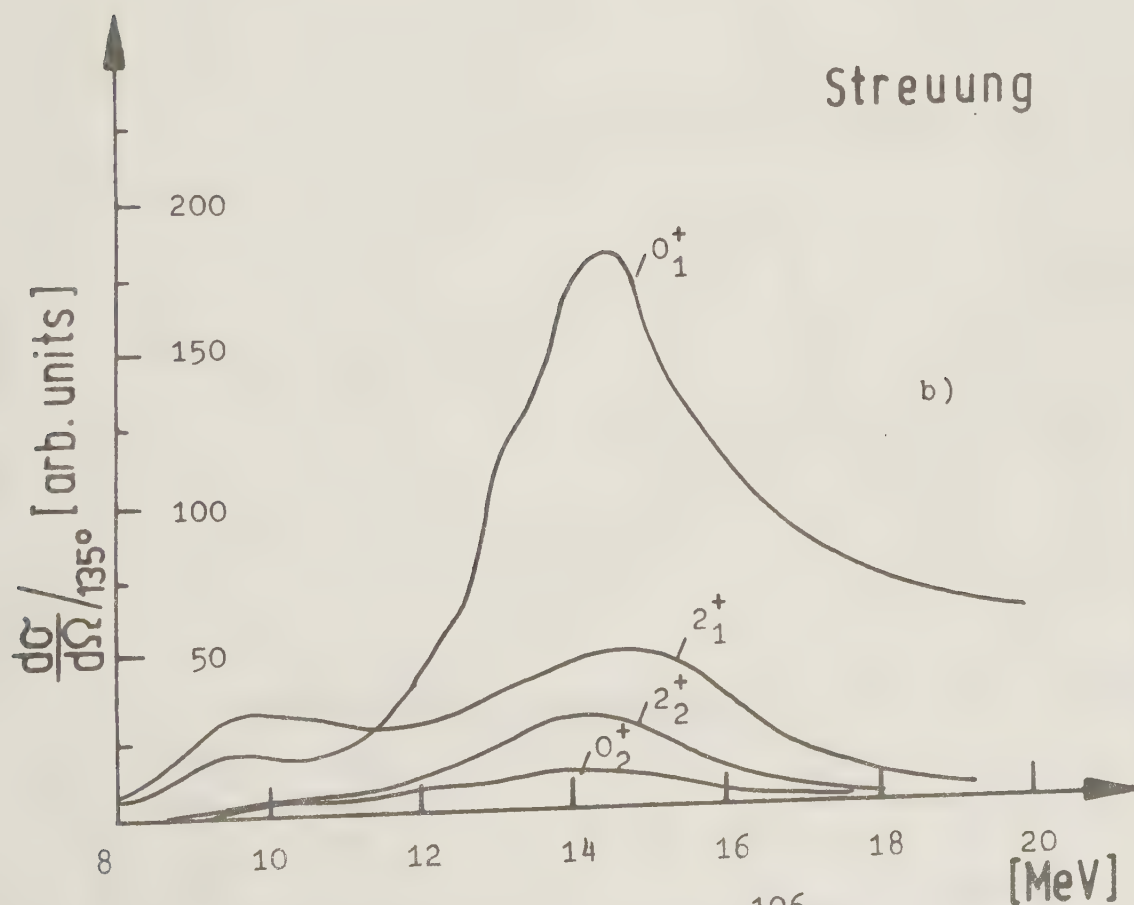
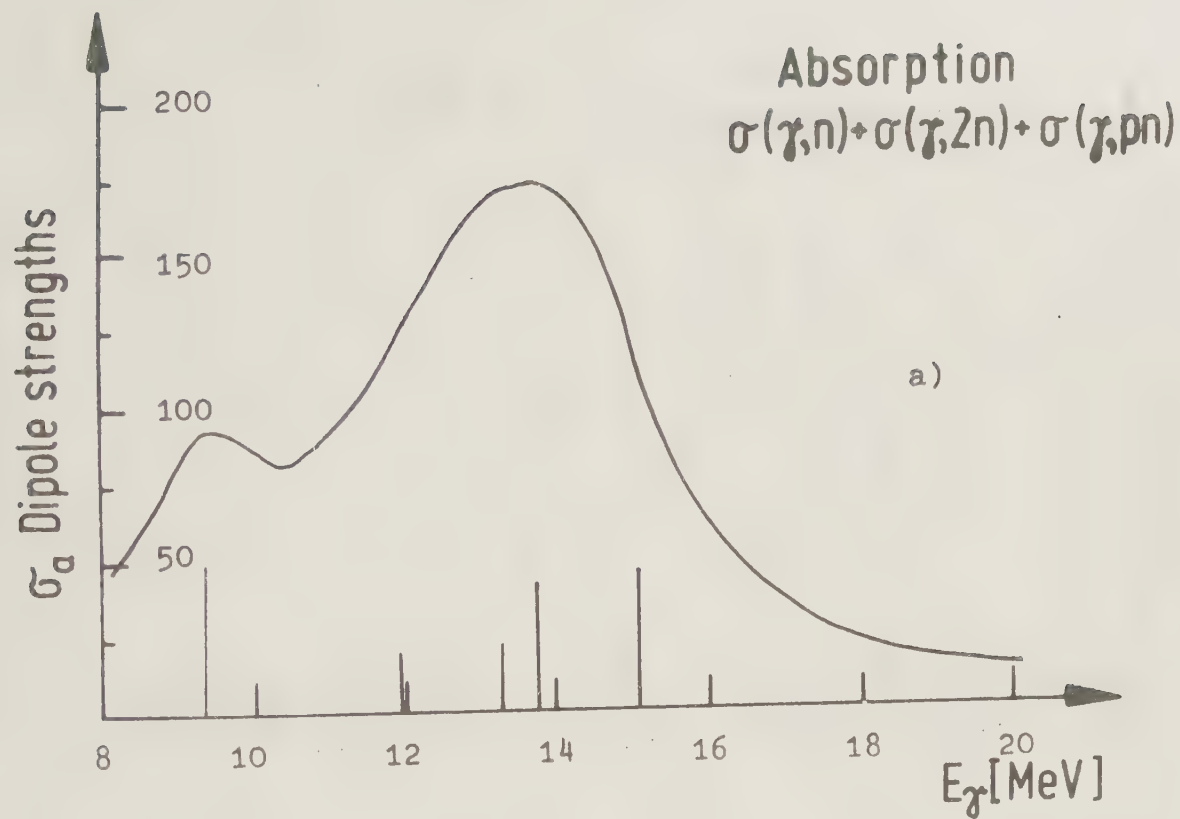


Fig. 64a E1-Absorptionsquerschnitt von ^{106}Ru

Fig. 64b E1-Streuquerschnitte von ^{106}Ru

Fig. 64

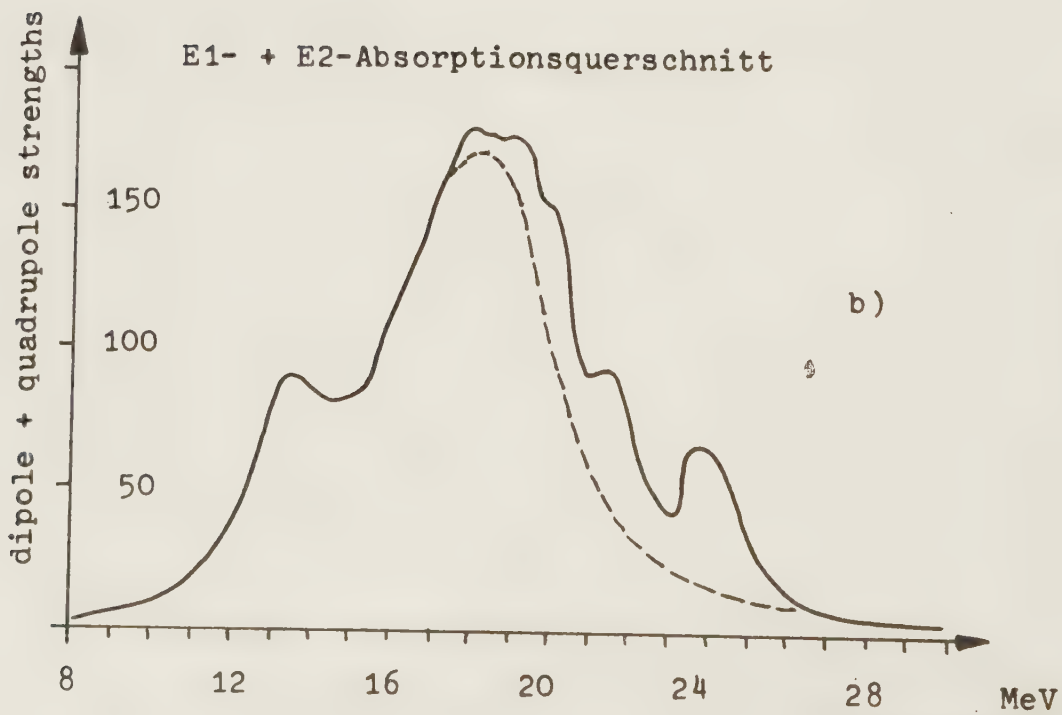
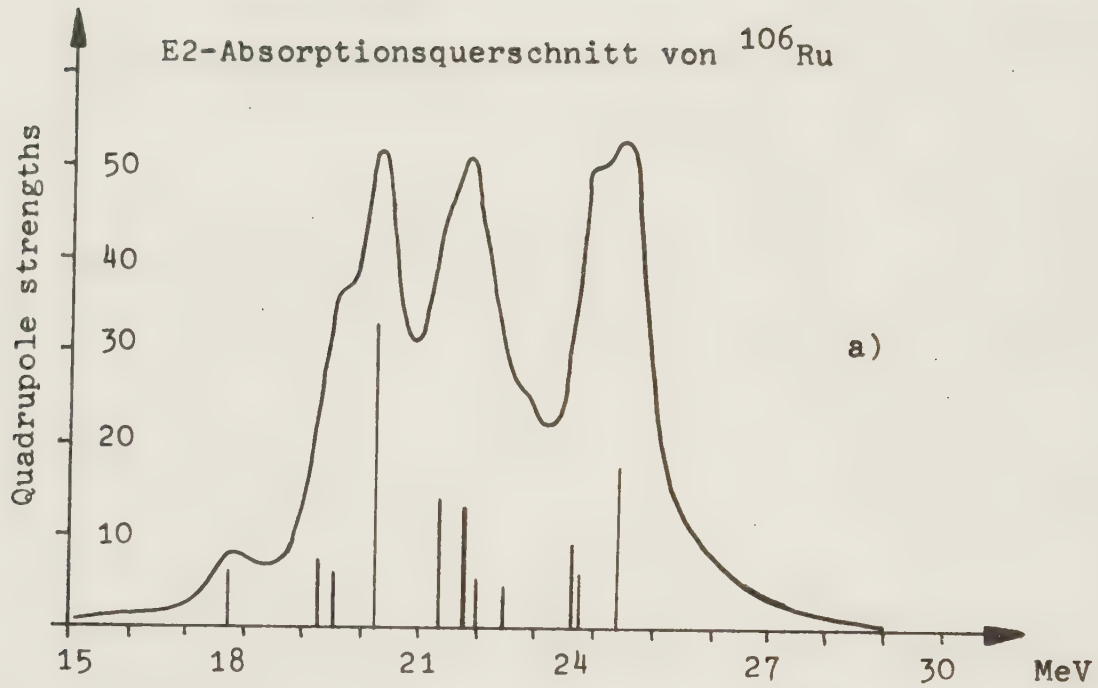


Fig. 65

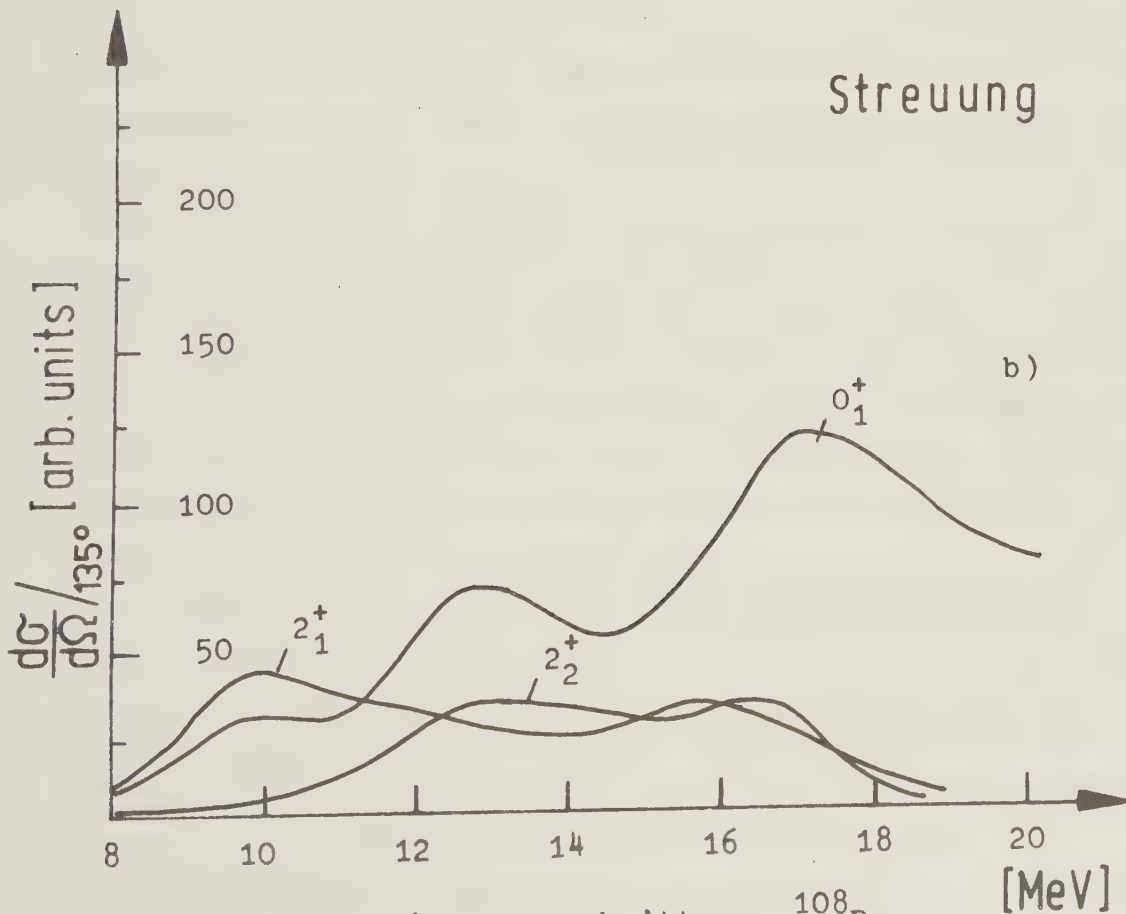
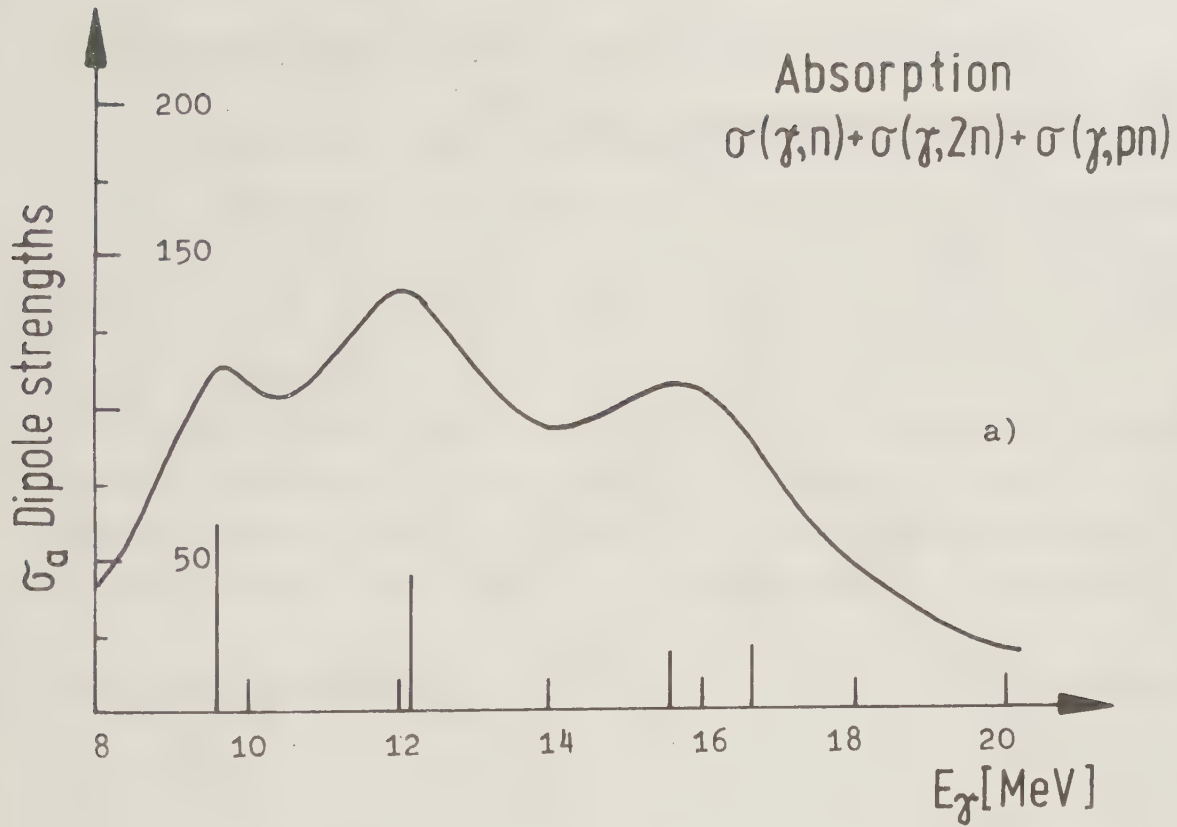


Fig. 66a E1-Absorptionsquerschnitt von ^{108}Ru
 Fig. 66b E1-Streuquerschnitte von ^{108}Ru

Fig. 66

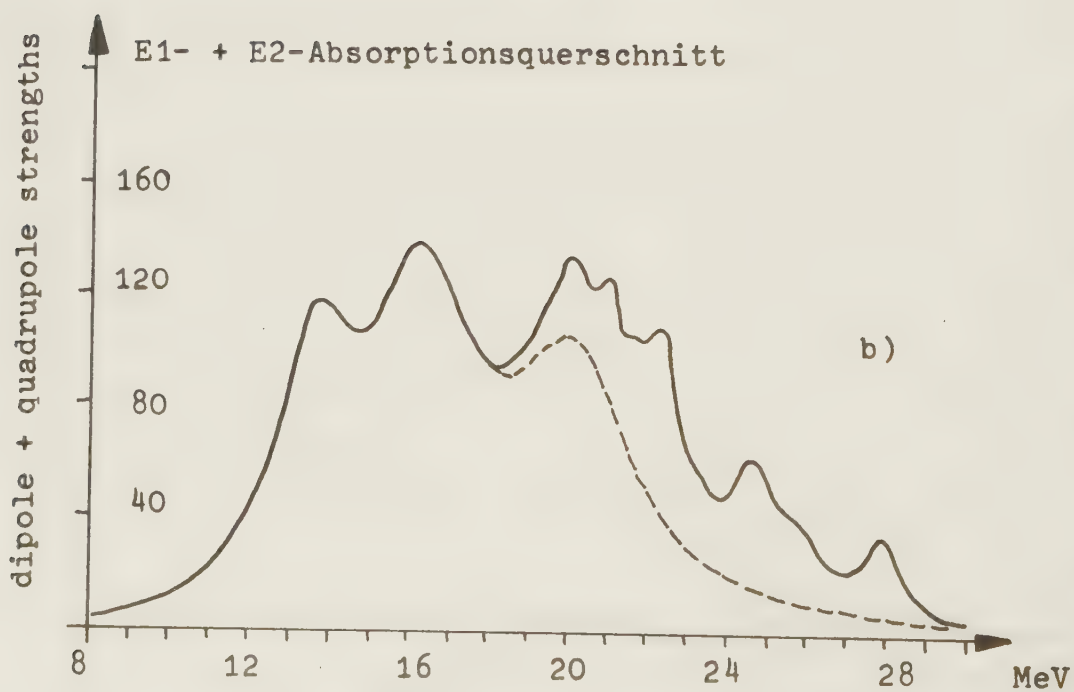
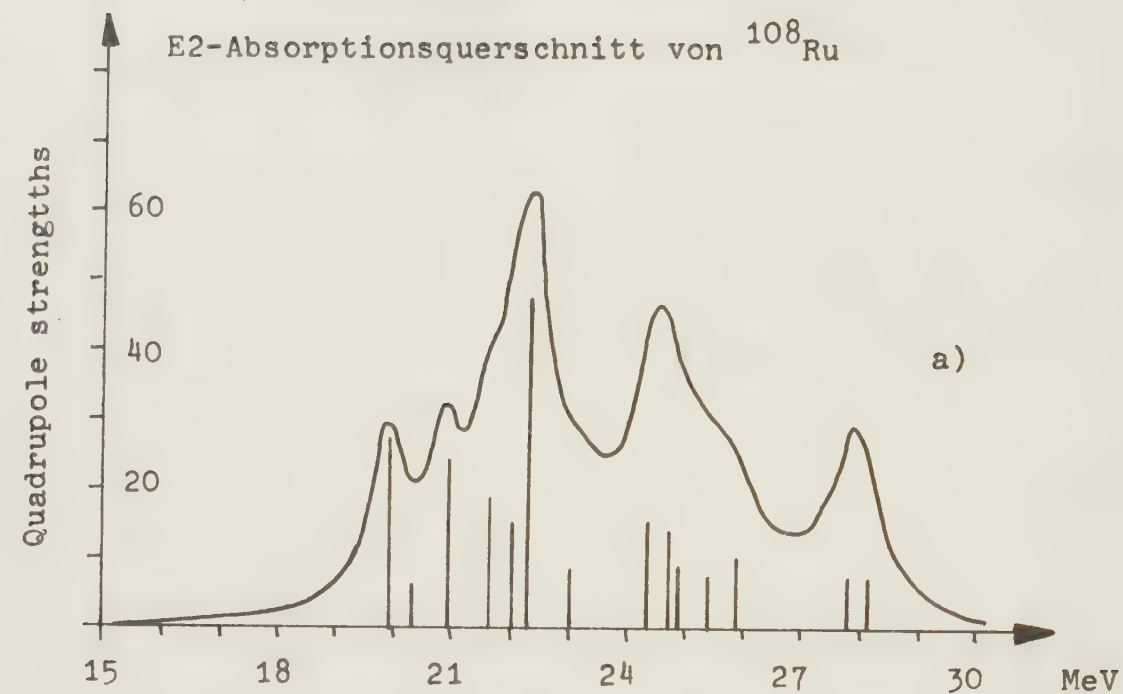


Fig. 67

5.5 Weitere Beispiele und Vergleich mit dem Experiment

Die Schwierigkeit, einen berechneten E2-Absorptionsquerschnitt mit dem Experiment zu vergleichen, ist in zwei Punkten begründet: erstens liegen nicht sehr viele Daten bezüglich der gg-Kerne vor und zum zweiten sind die Fehlergrenzen auf Grund der schwierigen Messung oft so groß, daß man fast beliebige Kurven hindurchlegen könnte.

In diesem Kapitel werden an Hand einzelner Isotope aus dem Os-, Gd- und Te-Bereich weitere Beispiele für E2-Absorptionsquerschnitte gezeigt und der addierte E1-E2-Absorptionsquerschnitt für eine Anzahl von Kernen mit dem Experiment verglichen.

5.5.1 Die Os-Isotope

Die Potentialenergieflächen der Os-Reihe in Fig. 68 zeigen prolate Rotatoren, die im Verlauf der Reihe an Topftiefe verlieren, jedoch die starken oblat-prolat-Differenzen beibehalten. Die Dominanz der β -Freiheitsgrade zeigt sich deutlich bei den E1-Riesenresonanzen in der einen dominanten Dipolstärke und dem starken Anteil der elastischen Streuung, sowie dem verschwindenden Beitrag der inelastischen Streuquerschnitte (Fig. 69, Fig. 72, Fig. 75, Fig. 78). In den ersten beiden Kernen ist noch eine leichte Wechselwirkung mit γ -Freiheitsgraden vorhanden, die bei ^{184}Os und ^{188}Os zu einer Aufspaltung der Dipolstärken führt. Bei den Quadrupolabsorptionsquerschnitten ist diese Aufspaltung noch deutlicher; sie nimmt gegen Ende der Reihe ab, und sie zeigt, dem prolatischen Rotationscharakter entsprechend, drei Peaks (Fig. 70, Fig. 73, Fig. 76, Fig. 79).

Die Figuren 74, 77, 80 zeigen die addierten E1- und E2-Absorptionsquerschnitte und einen Vergleich mit dem Experiment²⁰. Die gestrichelte Kurve gibt den E1-Anteil wieder, während die experimentell bestimmte Kurve mit Fehlerbalken angegeben ist.

Es wird in allen drei Fällen sehr gute Übereinstimmung, sowohl im Dipol- als auch im Quadrupolbereich, erzielt.

Die Breiten wurden mit $\Gamma_D = 3.0$ MeV und $\Gamma_Q = 0.9$ MeV angesetzt.

- 136 -

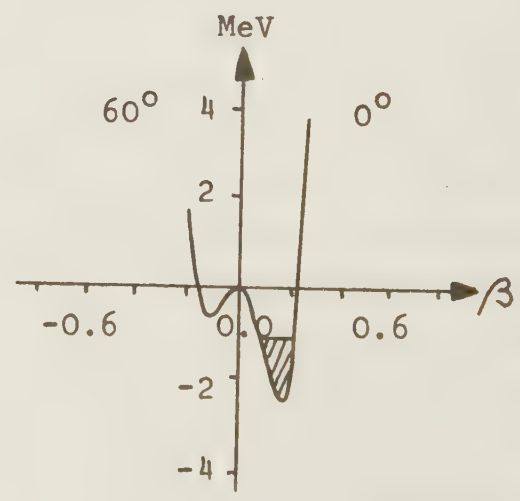
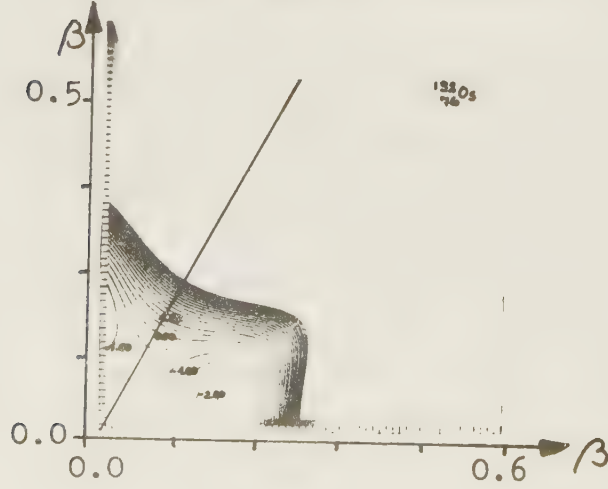
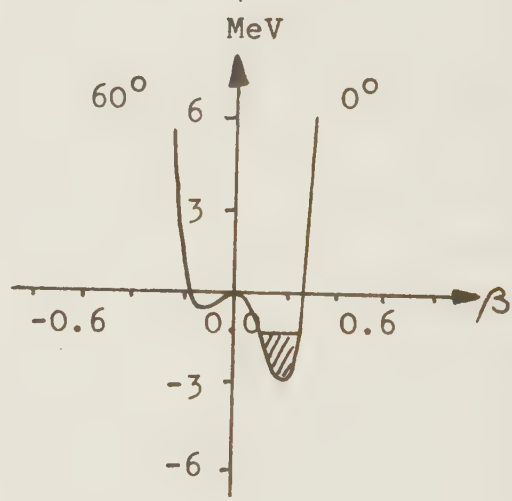
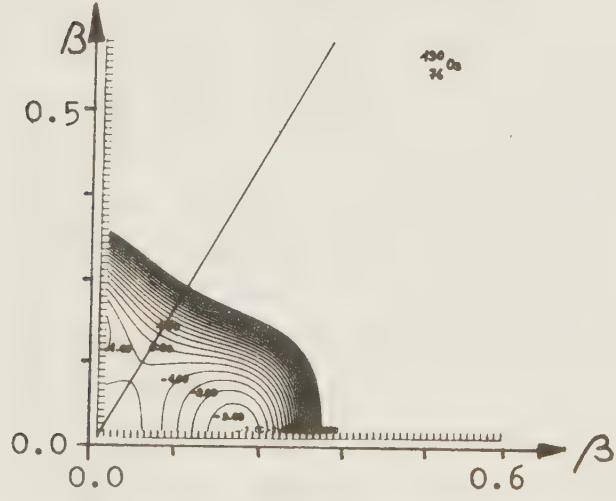
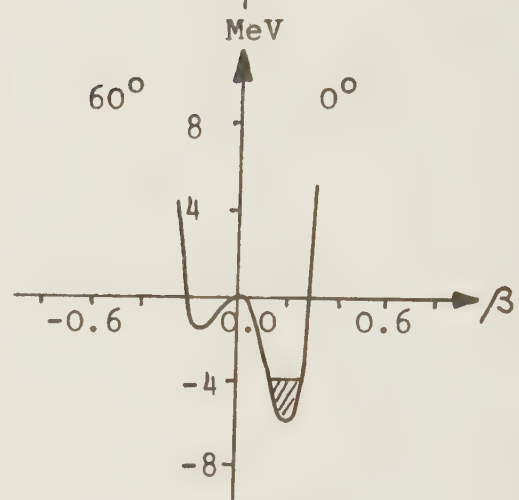
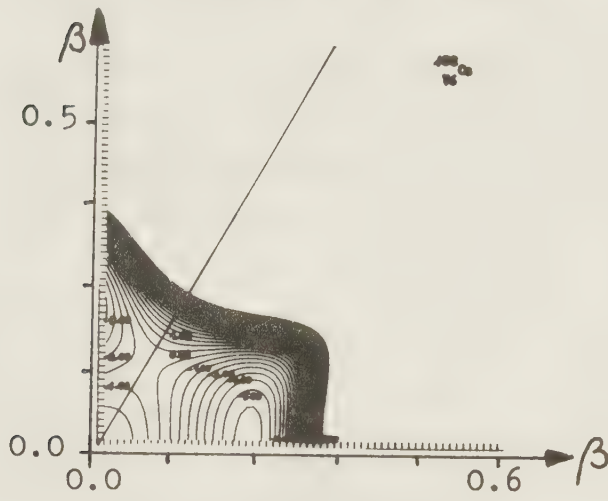
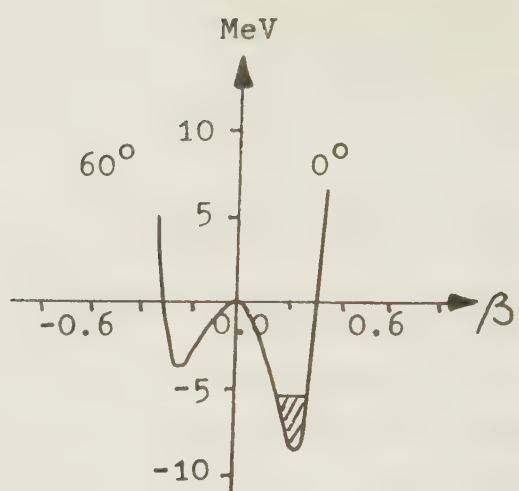
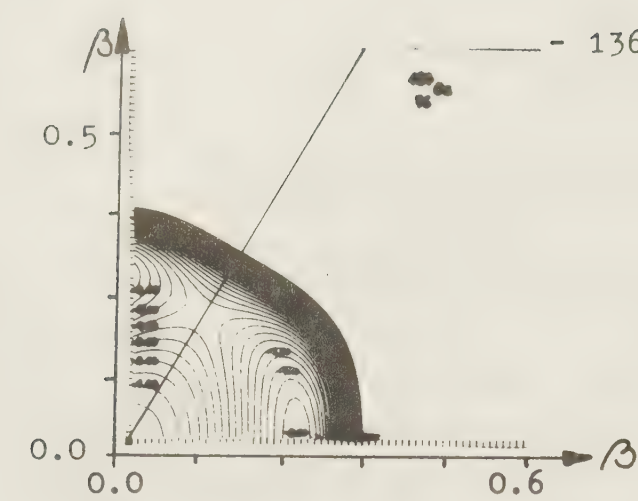


Fig. 68

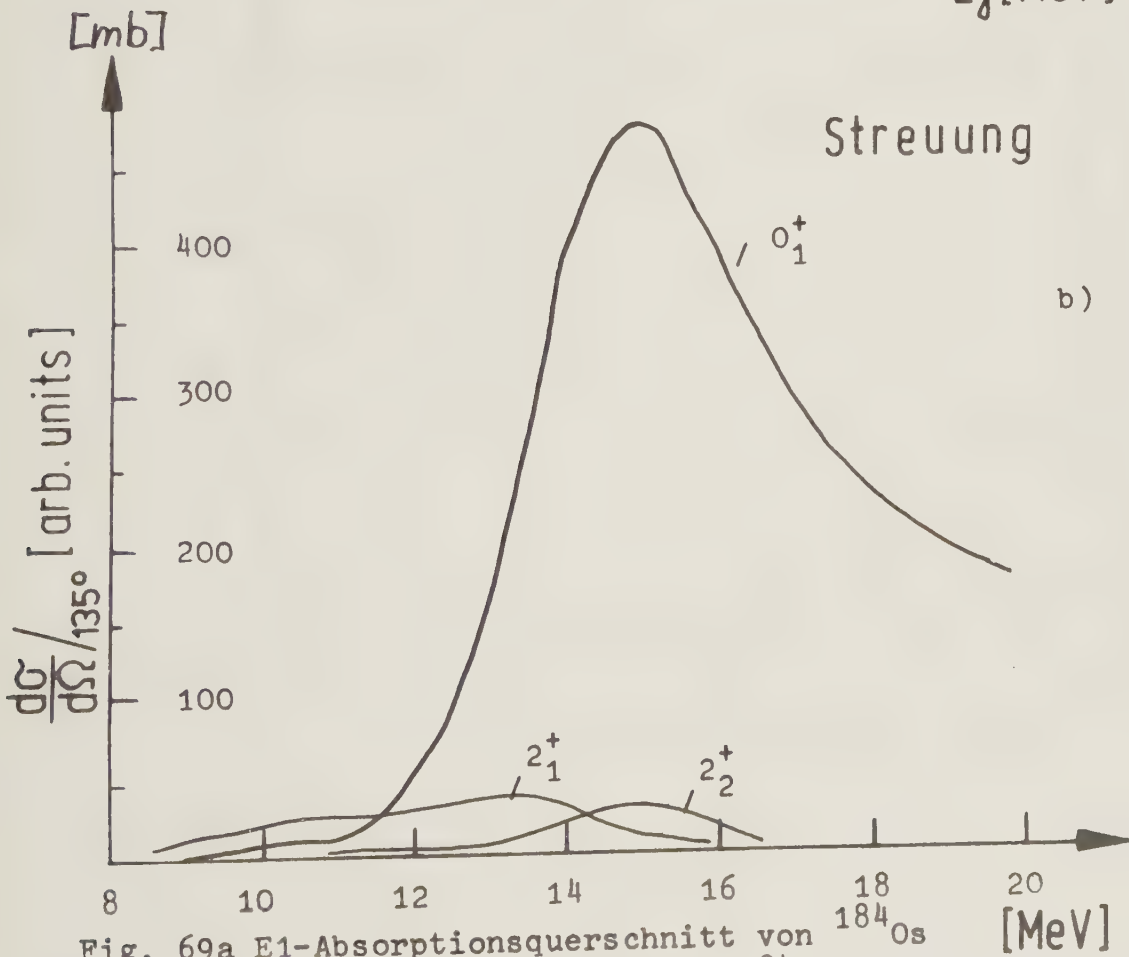
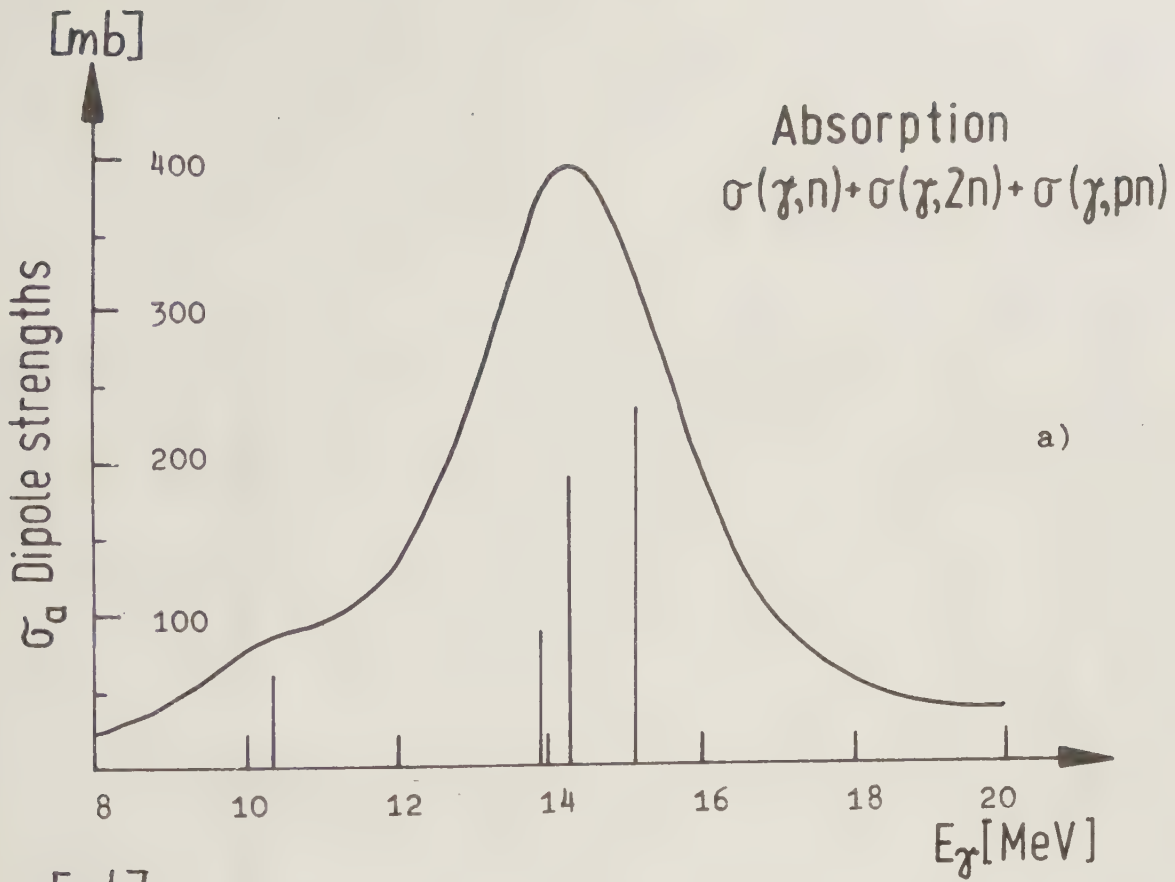


Fig. 69a E1-Absorptionsquerschnitt von ^{184}Os

Fig. 69b E1-Streuquerschnitte von ^{184}Os

Fig. 69



Fig. 70



Fig. 71

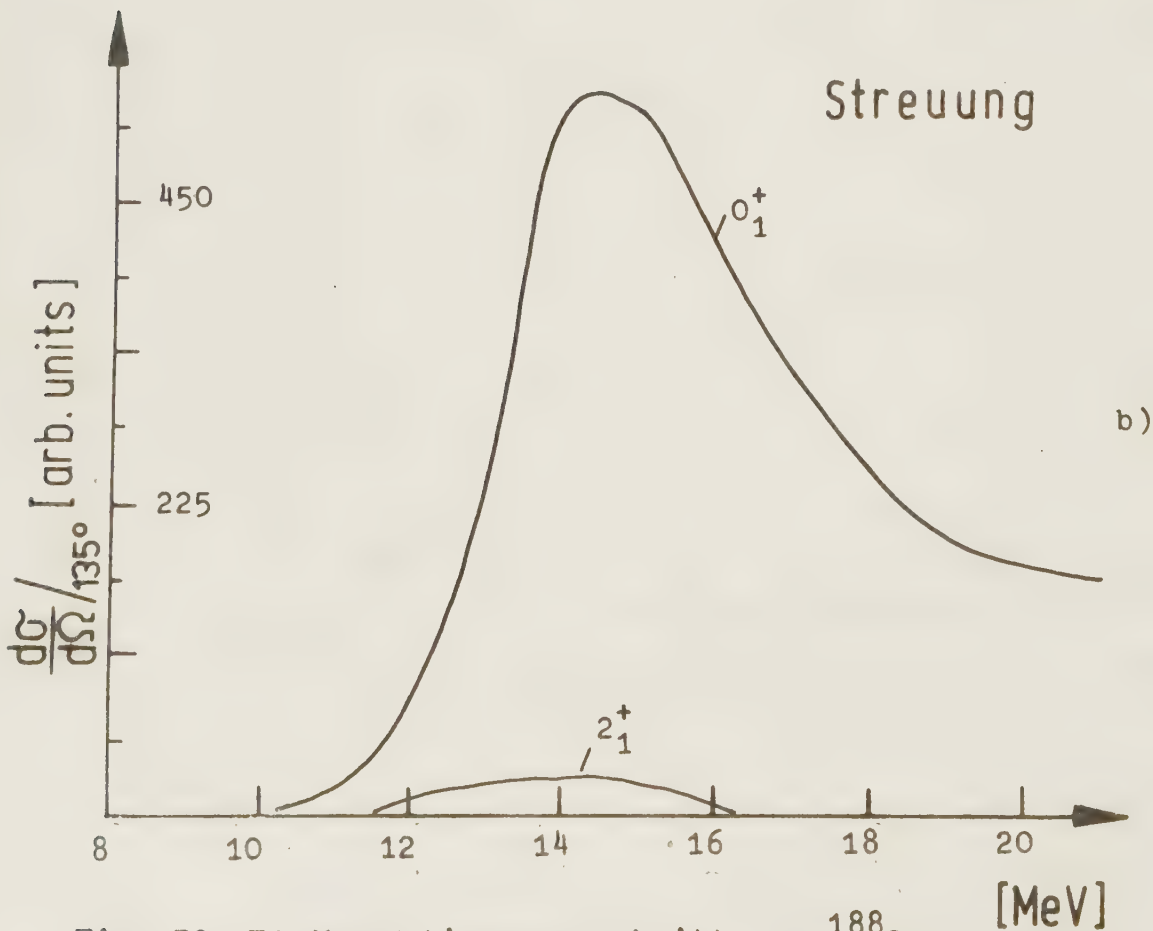
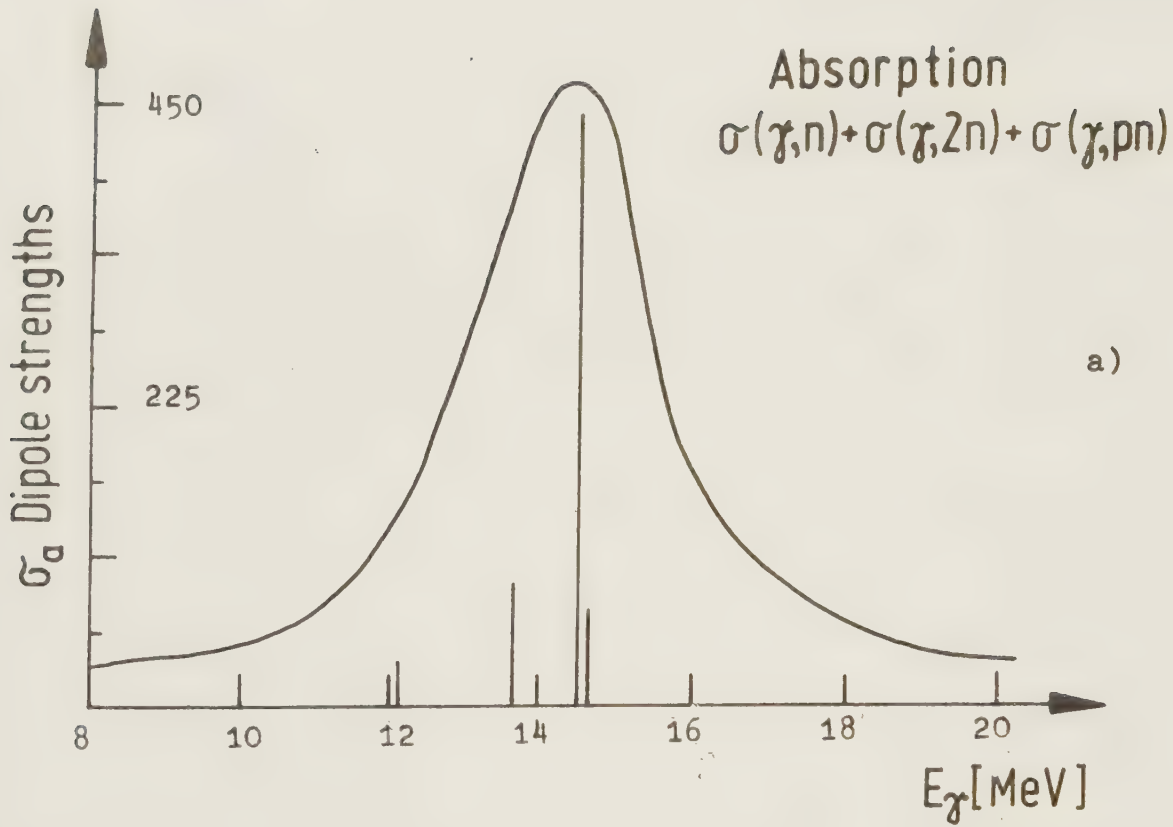


Fig. 72a E1-Absorptionsquerschnitt von ^{188}Os
 Fig. 72b E1-Streuquerschnitte von ^{188}Os

Fig. 72

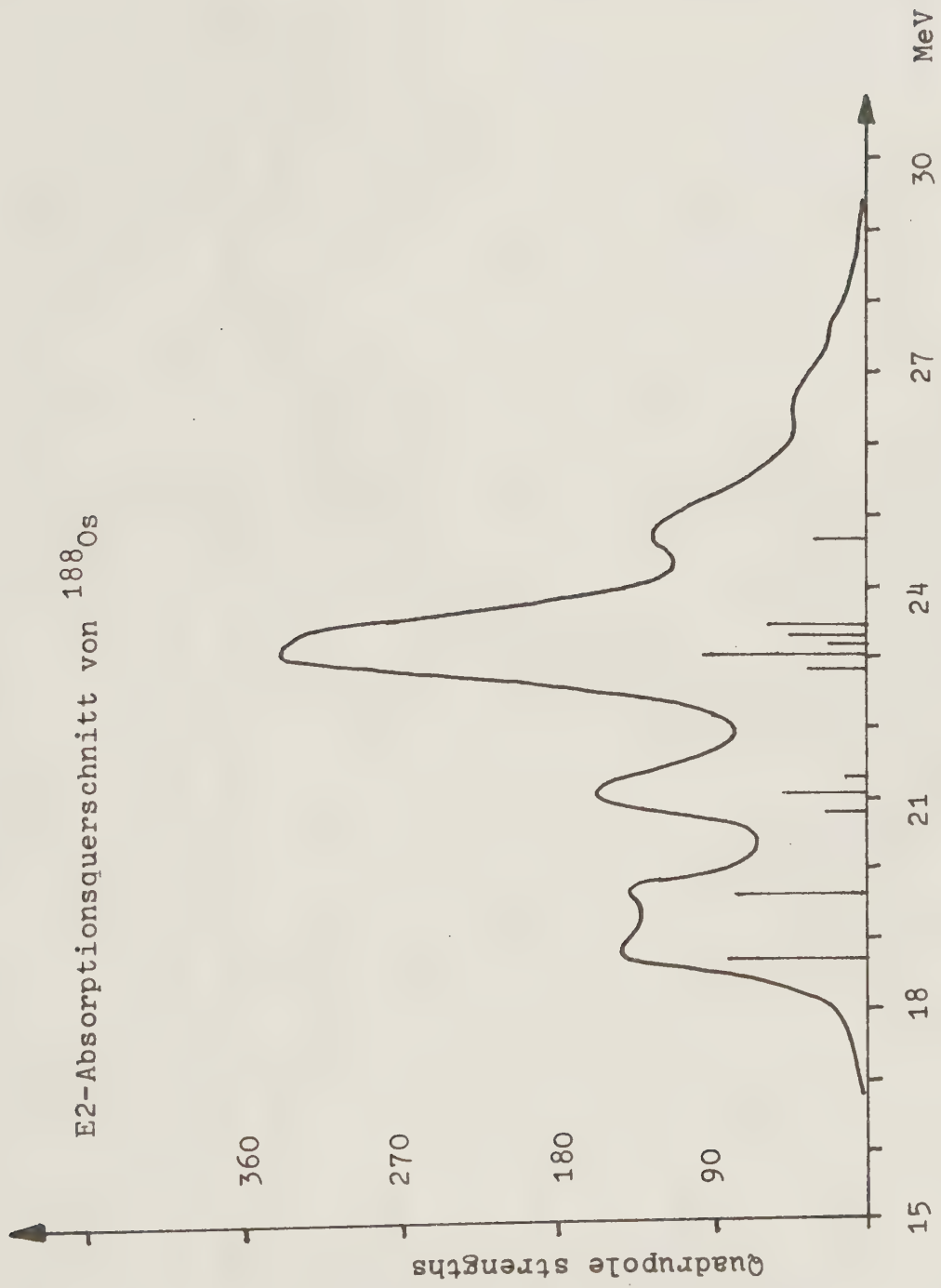


Fig. 73

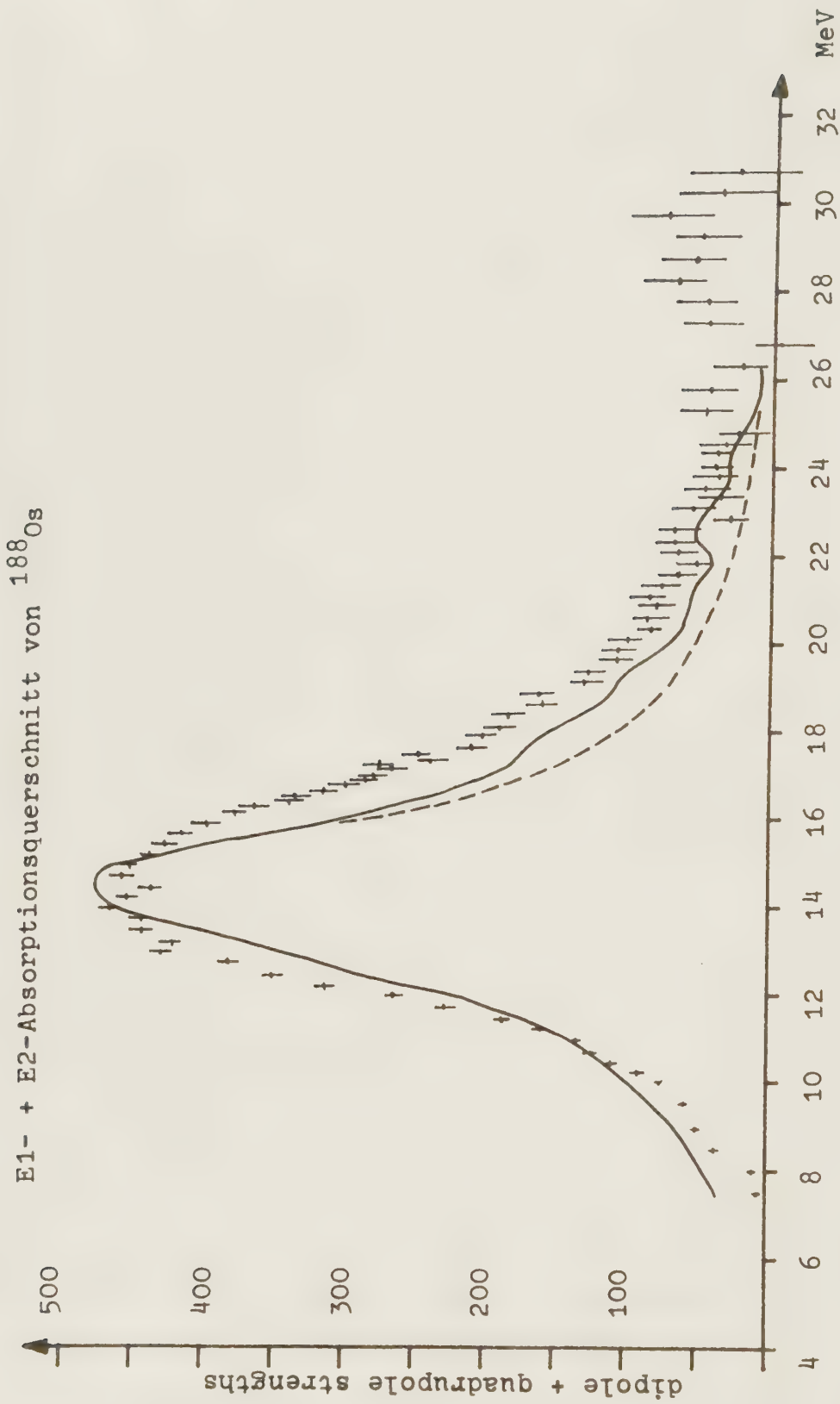


Fig. 74

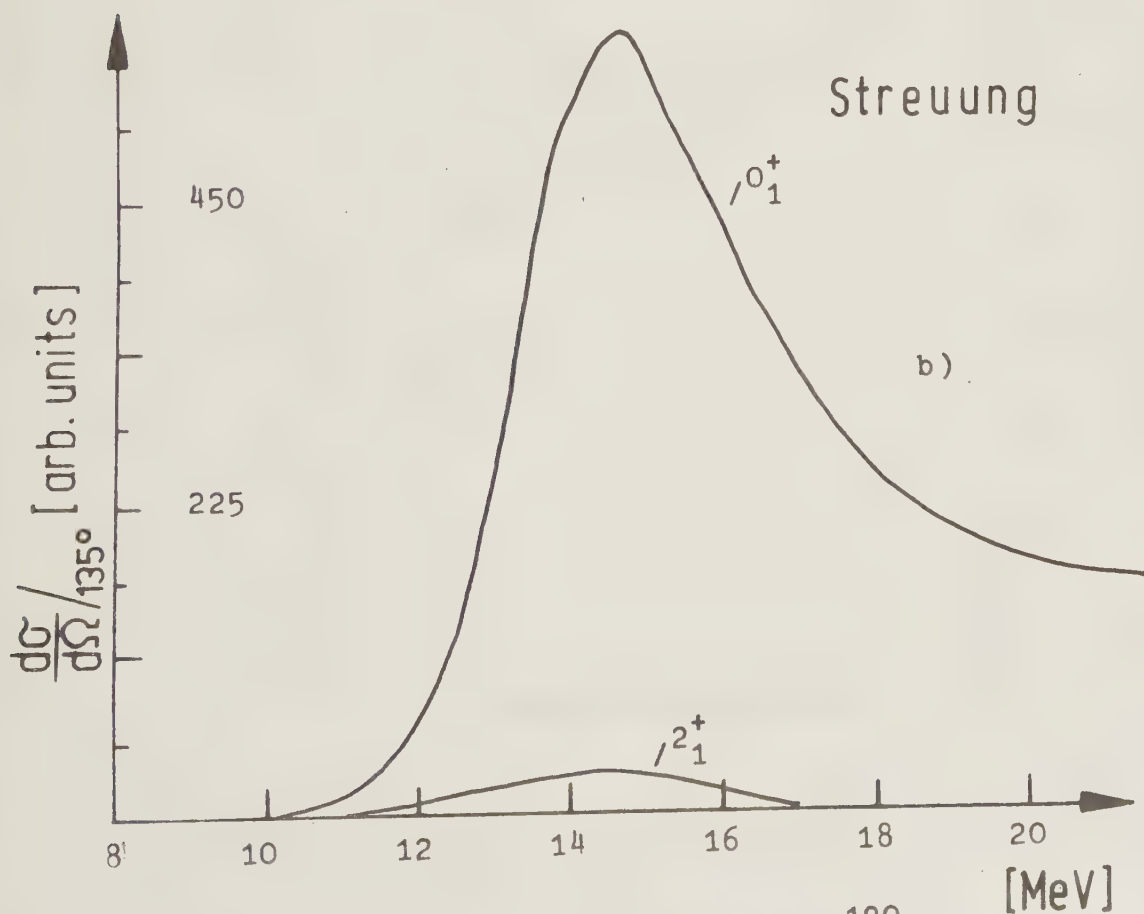
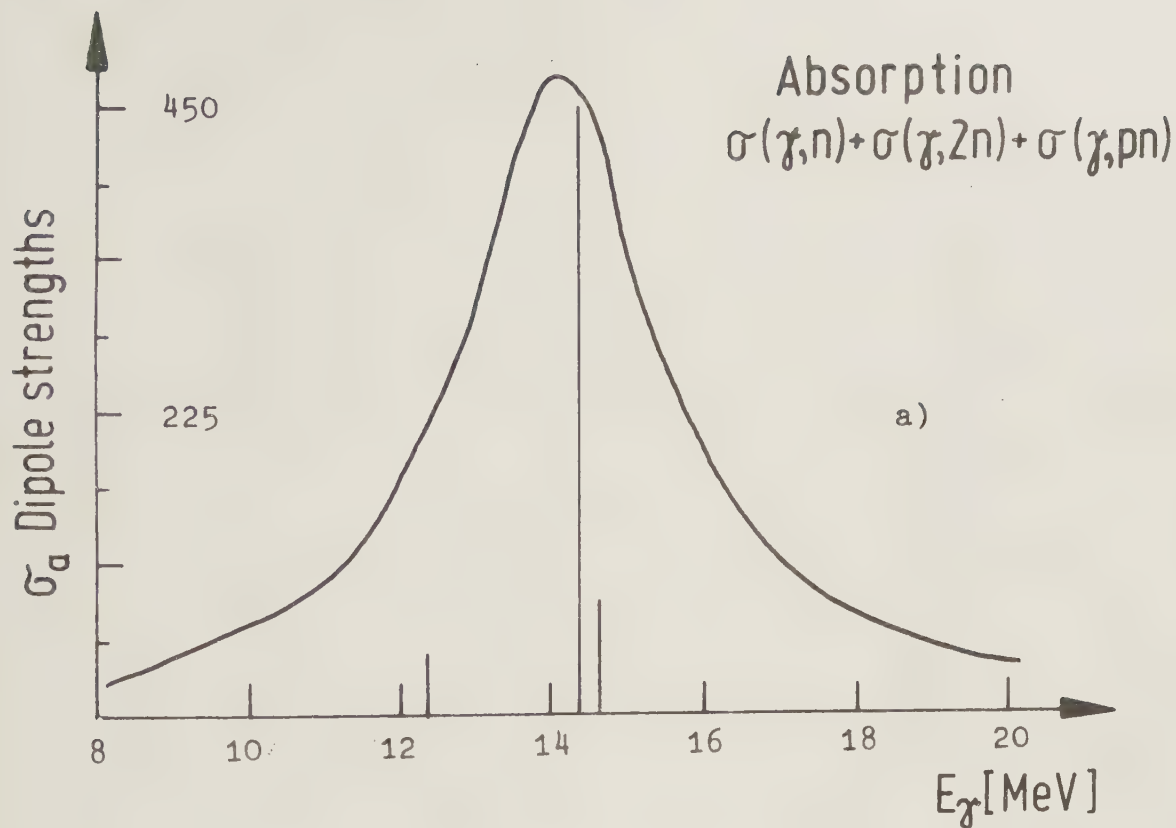


Fig. 75a E1-Absorptionsquerschnitt von ^{190}Os
 Fig. 75b E1-Streuquerschnitte von ^{190}Os

Fig. 75

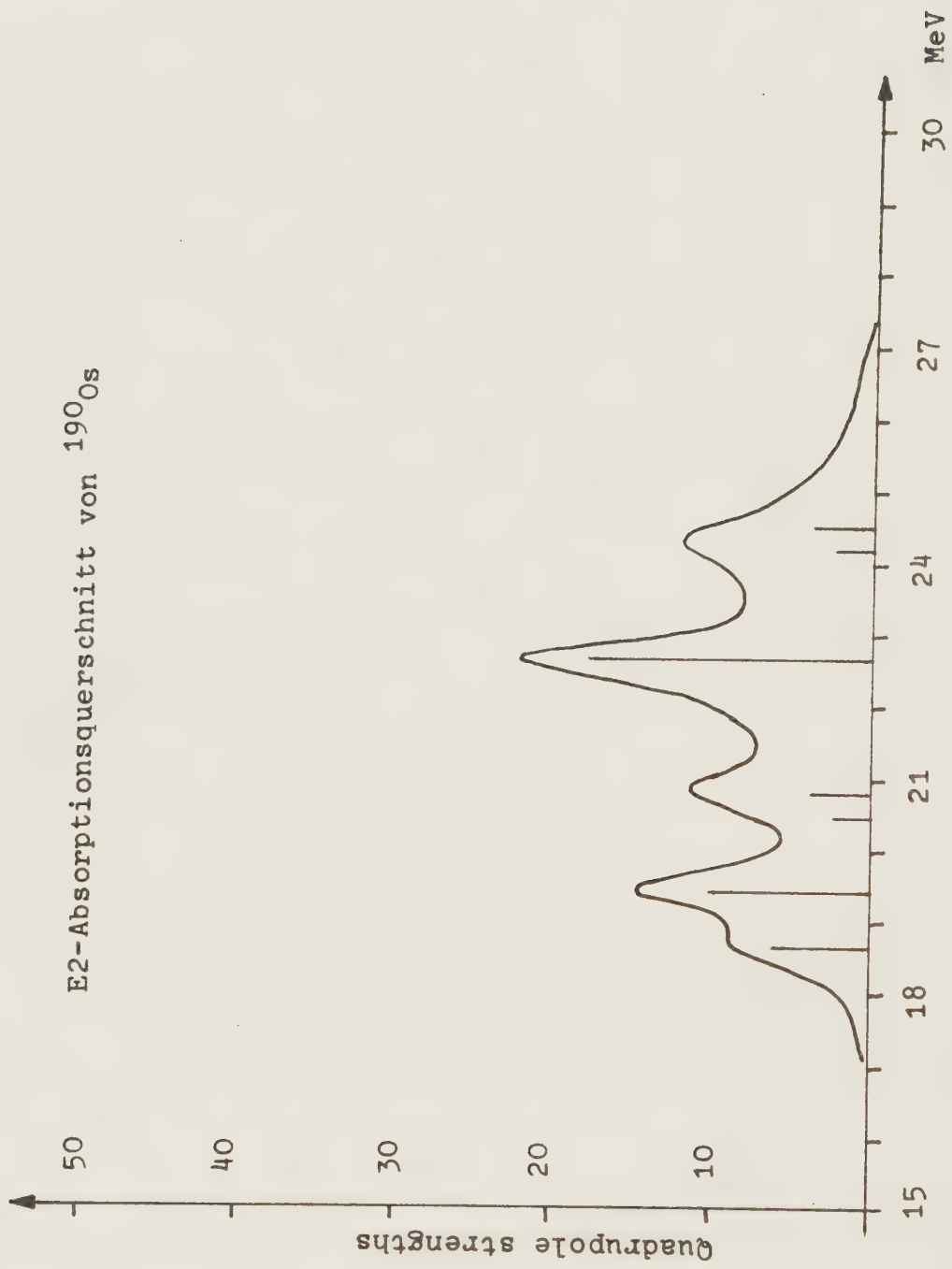


Fig. 76

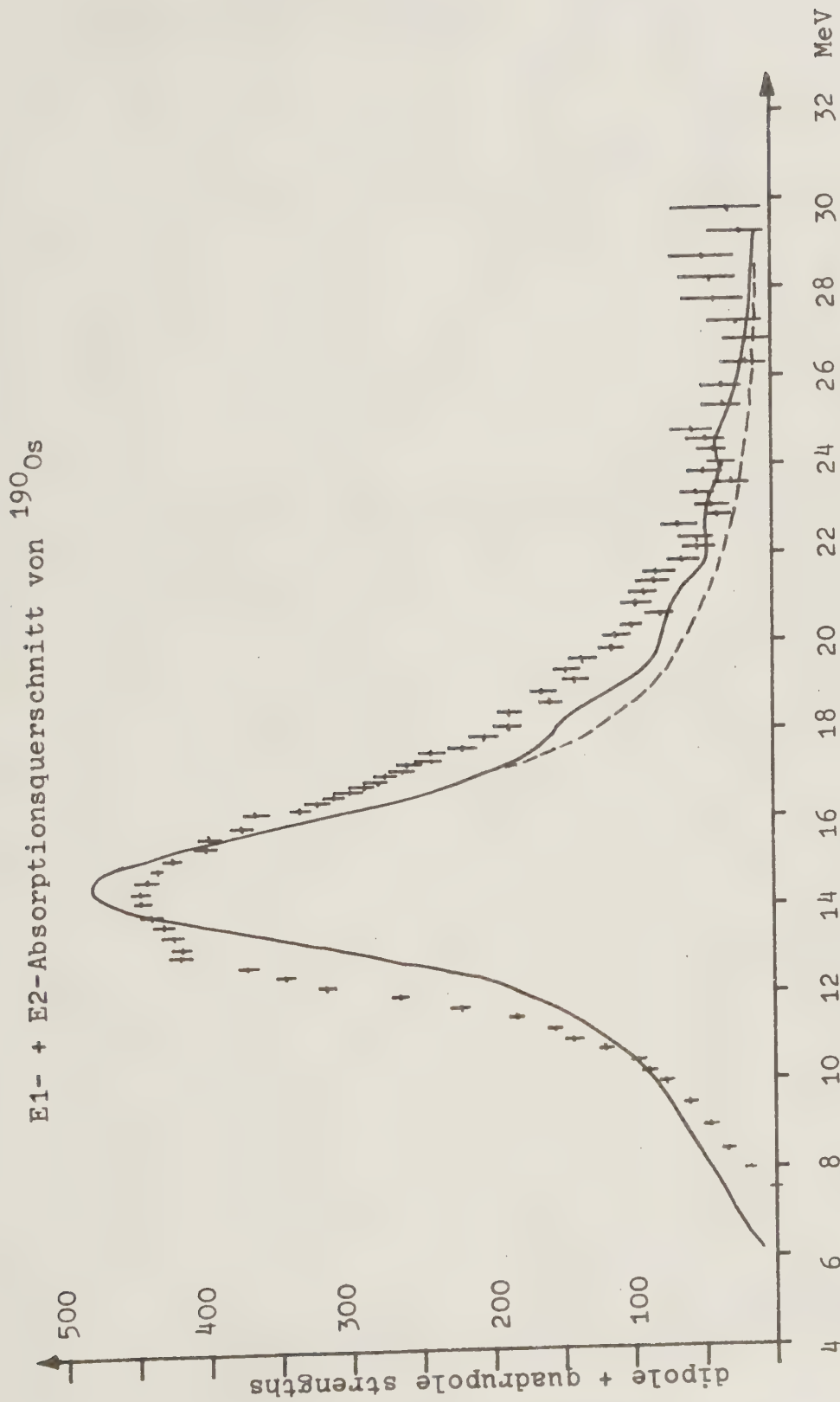


Fig. 77

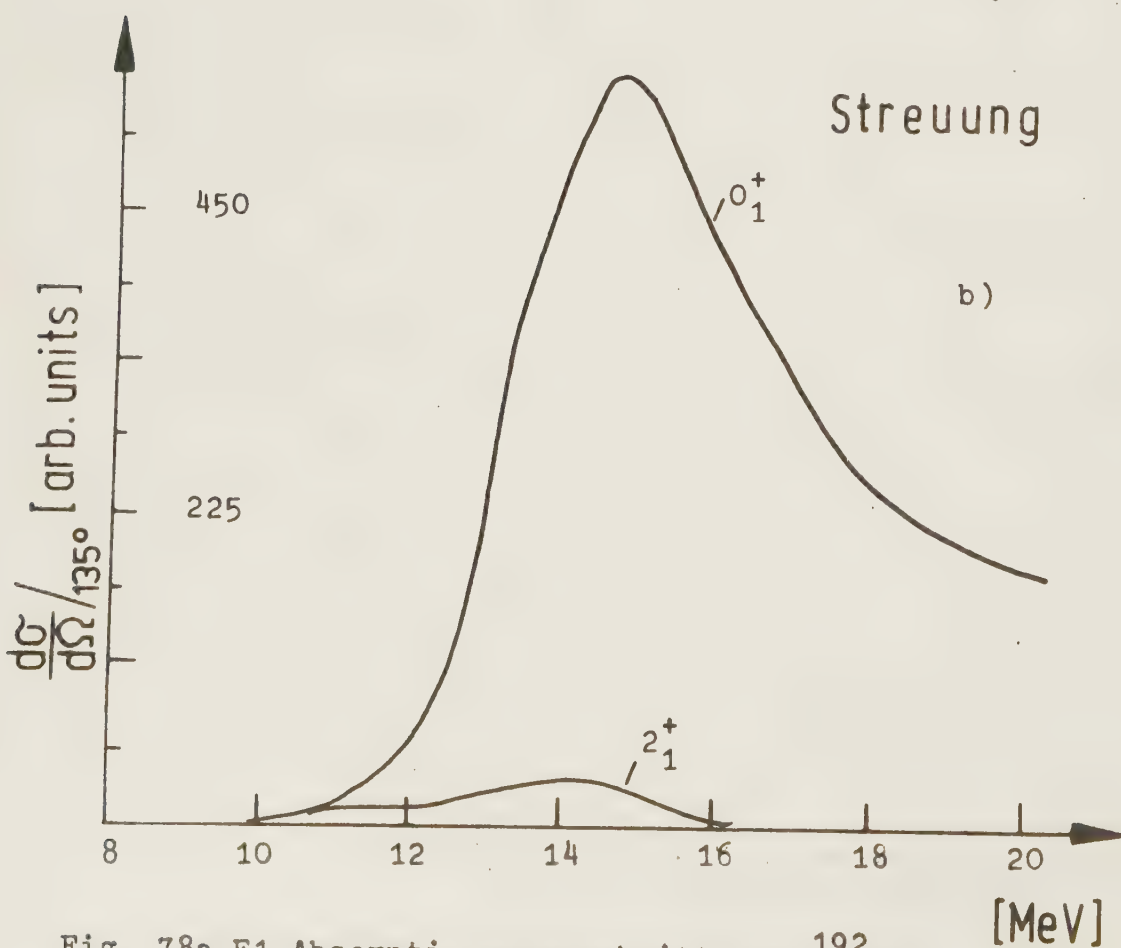
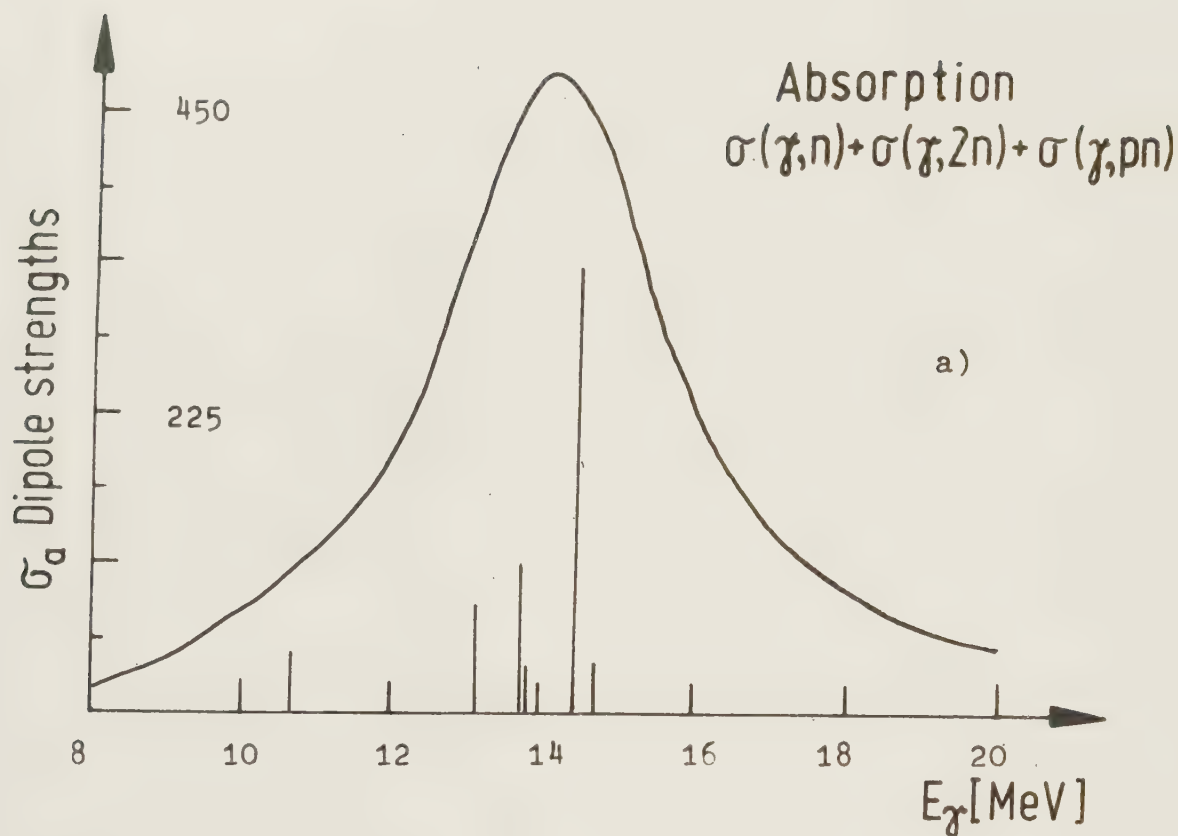


Fig. 78a E1-Absorptionsquerschnitt von ^{192}Os

Fig. 78b E1-Streuquerschnitte von ^{192}Os

Fig. 78

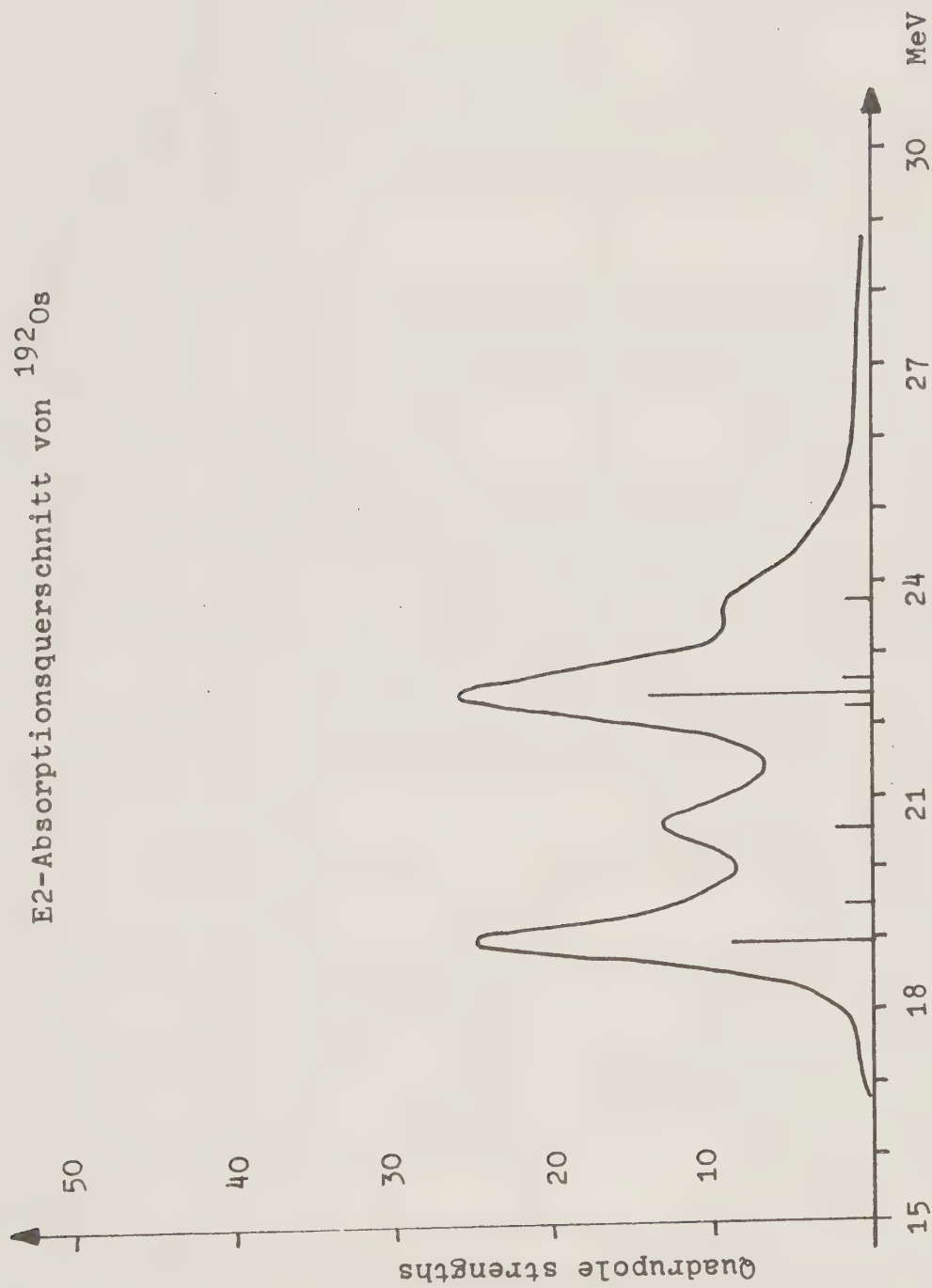


Fig. 79

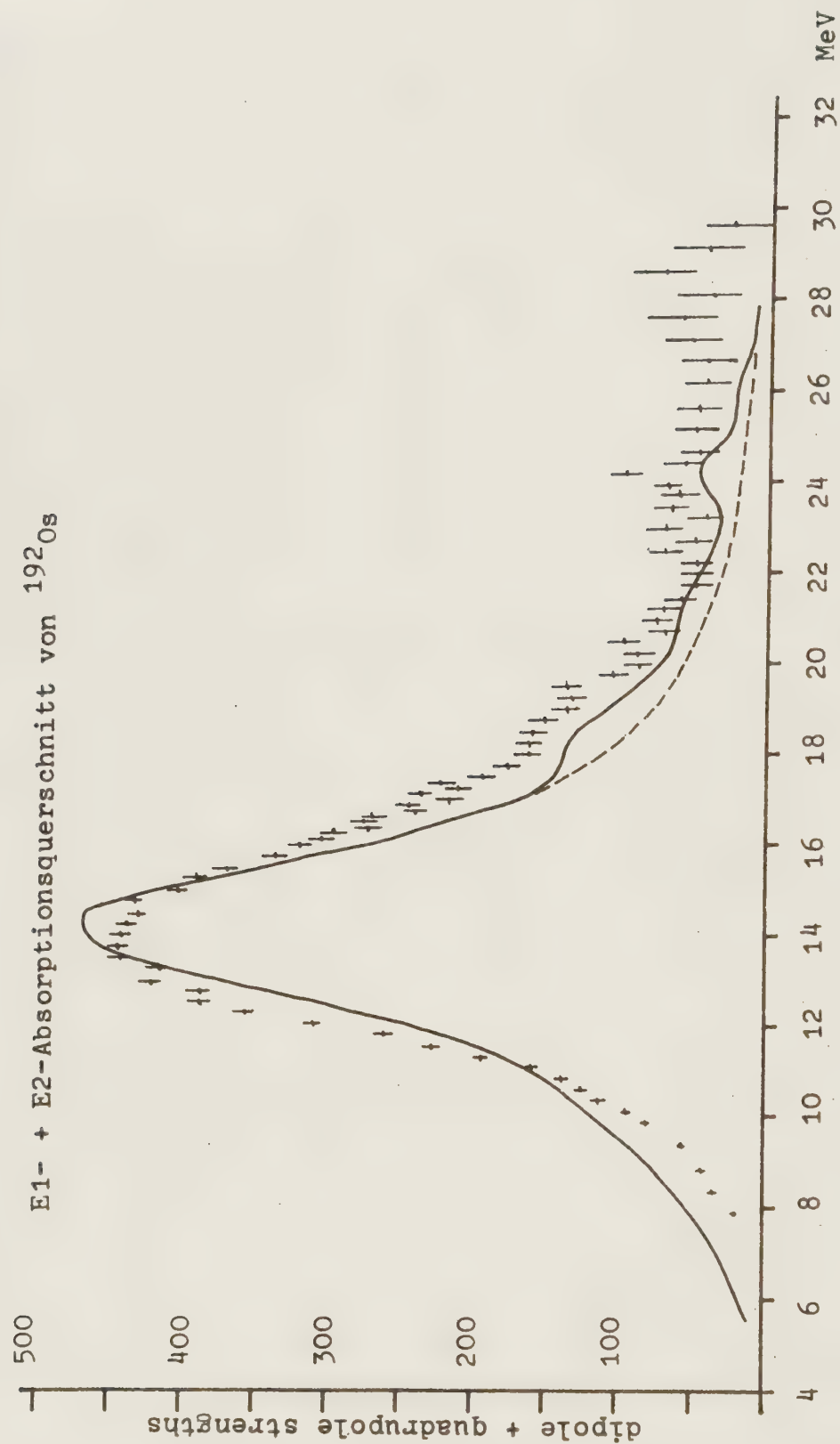


Fig. 80

5.5.2 Die Gd-Isotopenreihe

Hier wurden drei Isotope ausgewählt, deren PES in Fig. 81 einen Übergang von einem anharmonischen Vibrator mit schwachen prolaten Rotationseigenschaften zu prolaten Rotatoren zeigen, die in γ -Richtung weicher werden.

Der E1-Absorptionsquerschnitt (Fig. 82a) zeigt eine Aufspaltung der Dipolstärken, wie es für einen anharmonischen Vibrator typisch ist. In der Figur darunter sind die E1-Streuquerschnitte dargestellt.

Der E2-Absorptionsquerschnitt in Fig. 83a spürt die Rotationseigenschaften, was sich in der Aufspaltung in drei Peaks zeigt. In der Figur darunter ist der addierte E1- und E2-Absorptionsquerschnitt abgebildet.

Die nächsten beiden Kerne ^{156}Gd und ^{160}Gd sind Rotationskerne, die in den E1-Absorptionsquerschnitten in Fig. 84a und Fig. 86a das typische Aufspalten in zwei Peaks zeigen. Typisch sind ebenso die starken inelastischen 2_1^+ -Streuquerschnitte, die bei niedriger Energie über der elastischen Flanke liegen (Fig. 84b, Fig. 86b).

Die E2-Absorptionsquerschnitte zeigen drei dominante Peaks (Fig. 85a, Fig. 87a), die auf Grund des γ -Einflusses leicht aufzuspalten beginnen.

In Fig. 85b ist der addierte E1- und E2-Absorptionsquerschnitt dargestellt.

Die Fig. 87b zeigt einen Vergleich mit dem Experiment (--- - Kurve). Die durchgezogene Kurve stellt die addierten E1- und E2-Absorptionsquerschnitte, die gestrichelte den E1-Anteil dar. Im Dipolgebiet liegt der energetisch niedrigere Peak in der Theorie zu tief; im Quadrupolbereich besteht sehr gute Übereinstimmung.

Die experimentelle Kurve wurde durch die Meßwerte gelegt, die aus dem Atlas von Berman ²¹ entnommen wurden.

Die Breite der E1-Resonanz wurde mit $\Gamma_D = 3.0$ MeV, die der E2-Resonanz mit 0.9 MeV angestzt.

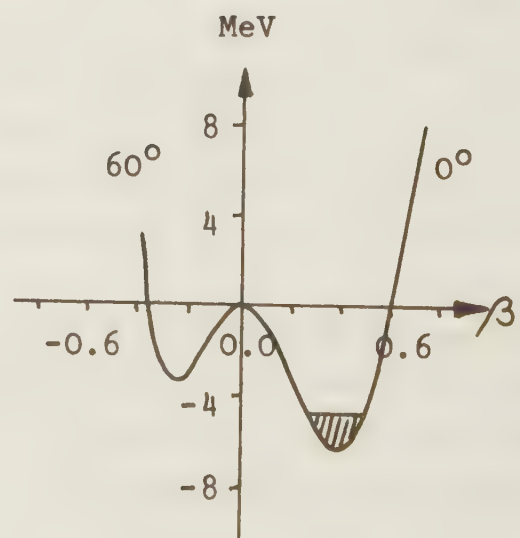
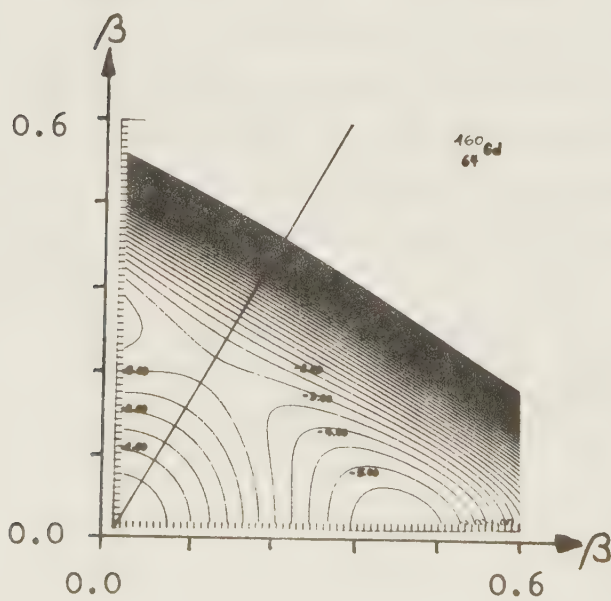
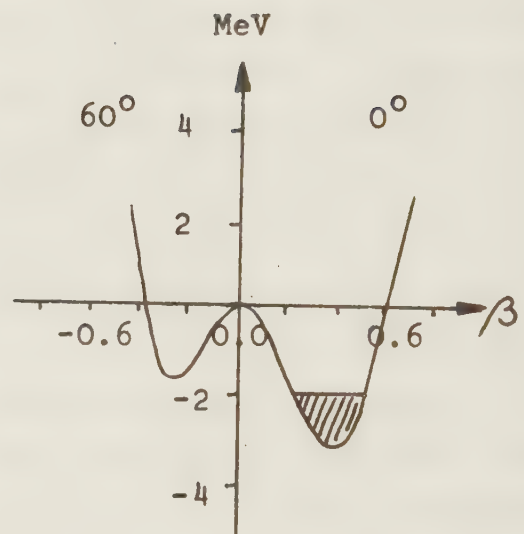
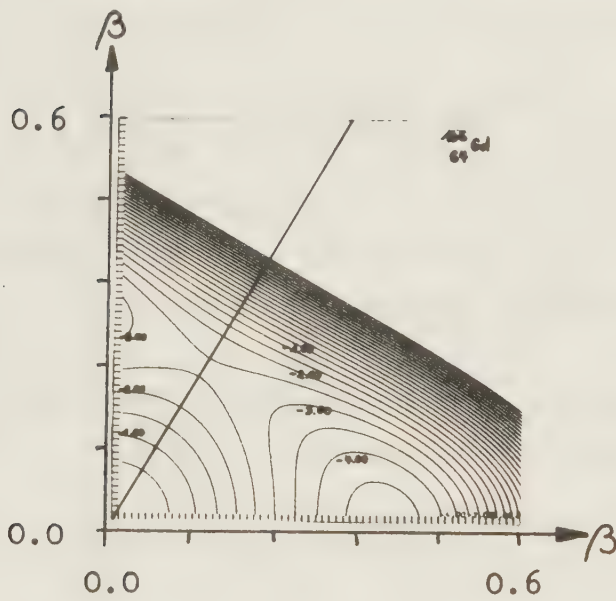
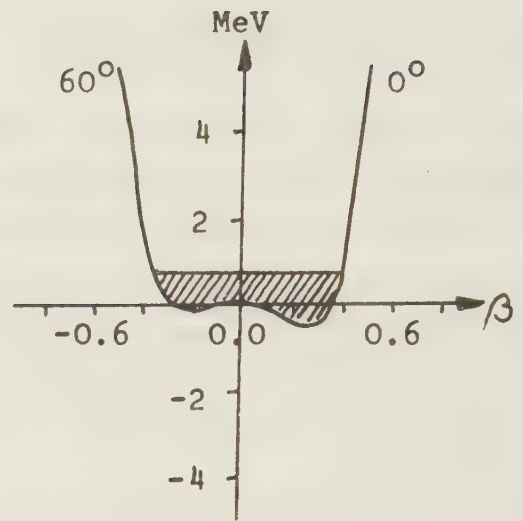
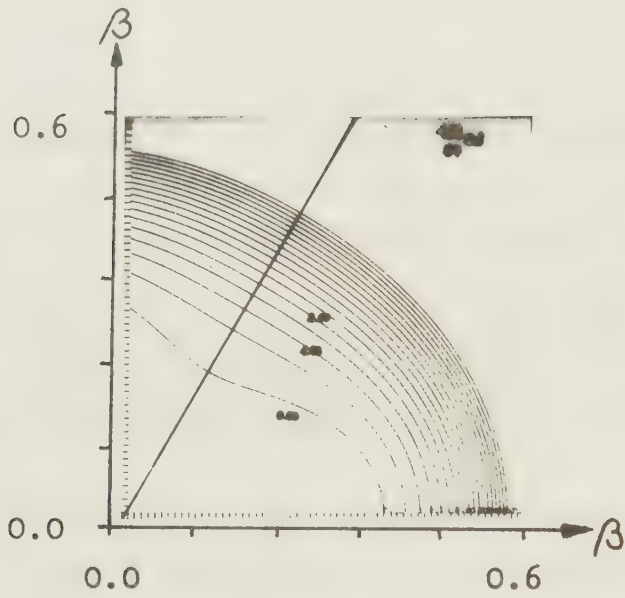


Fig. 81

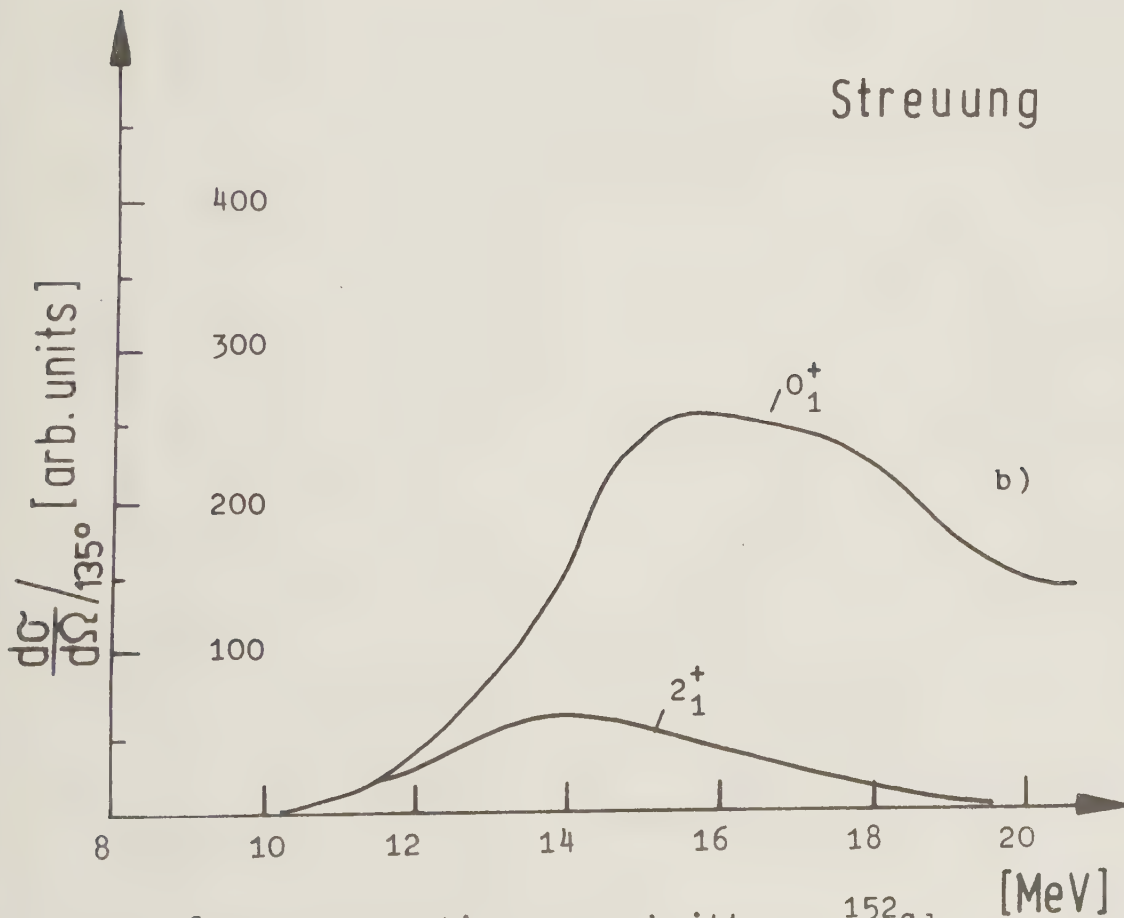
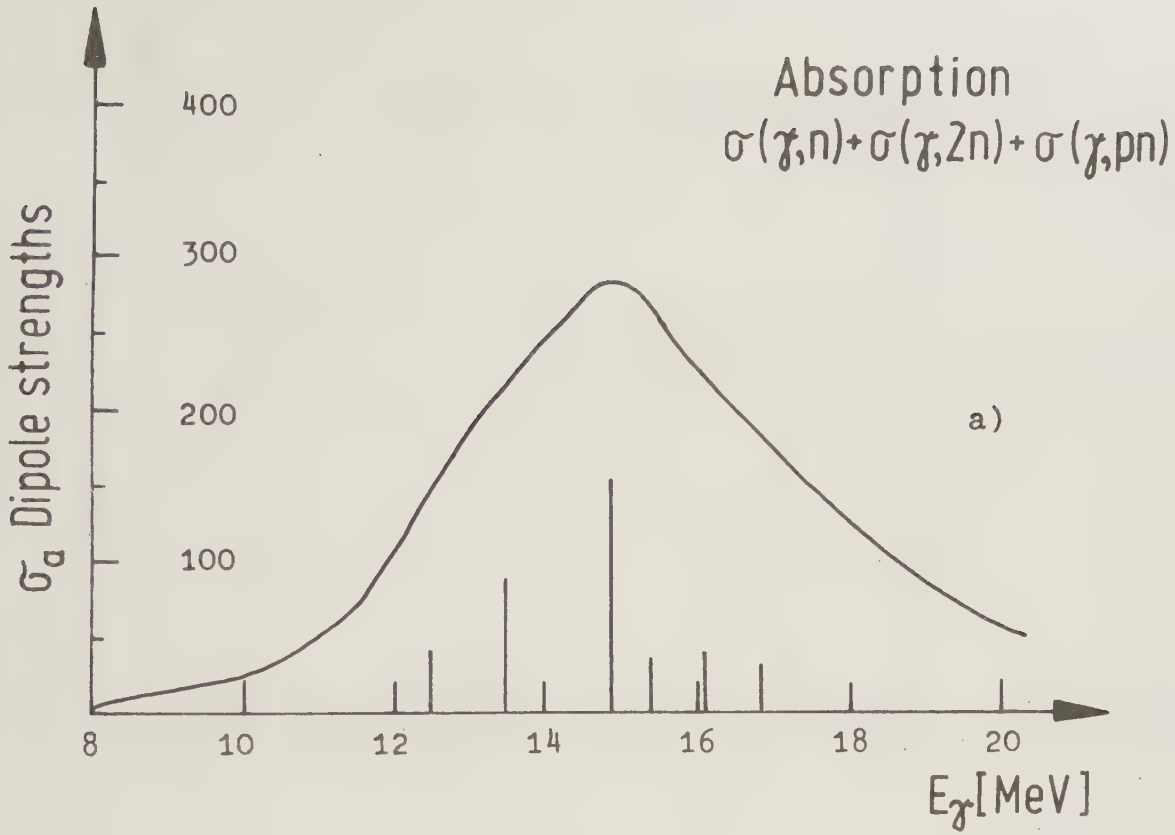


Fig. 82a E1-Absorptionsquerschnitt von ^{152}Gd
 Fig. 82b E1-Streuquerschnitte von ^{152}Gd

Fig. 82

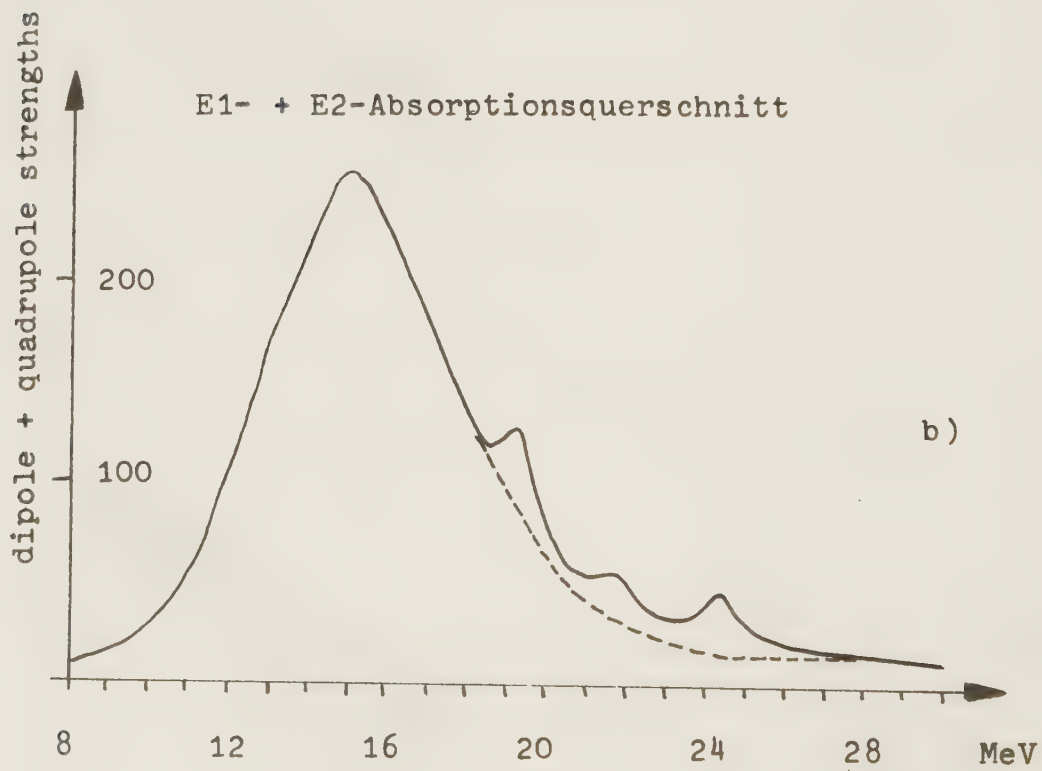
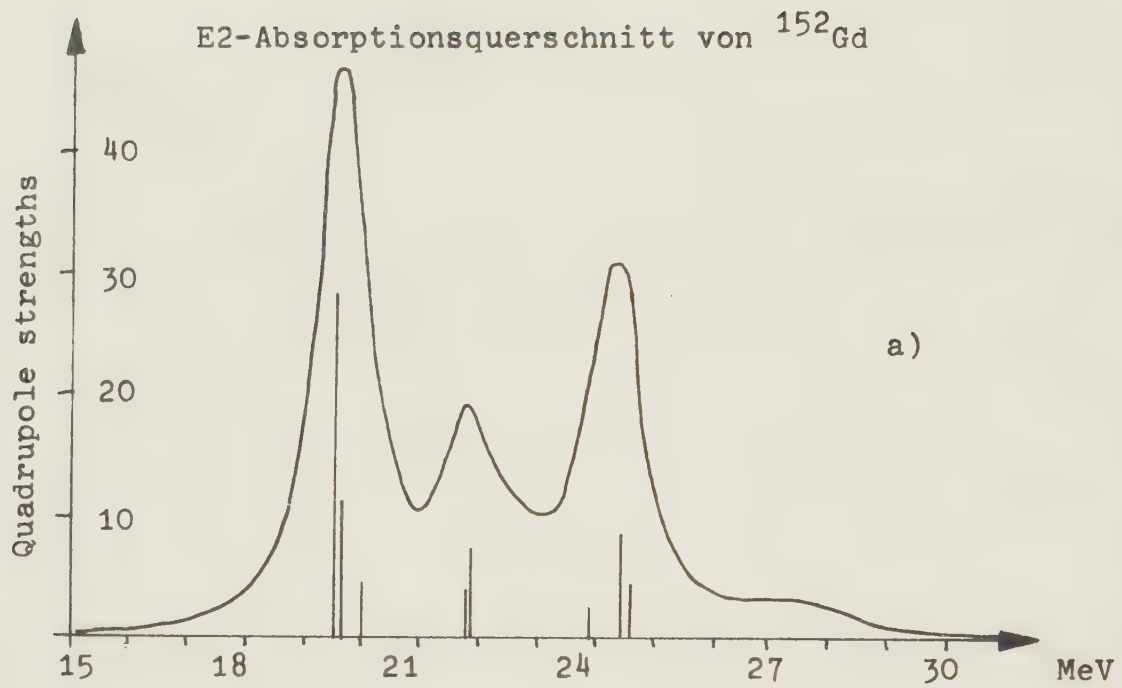


Fig. 83

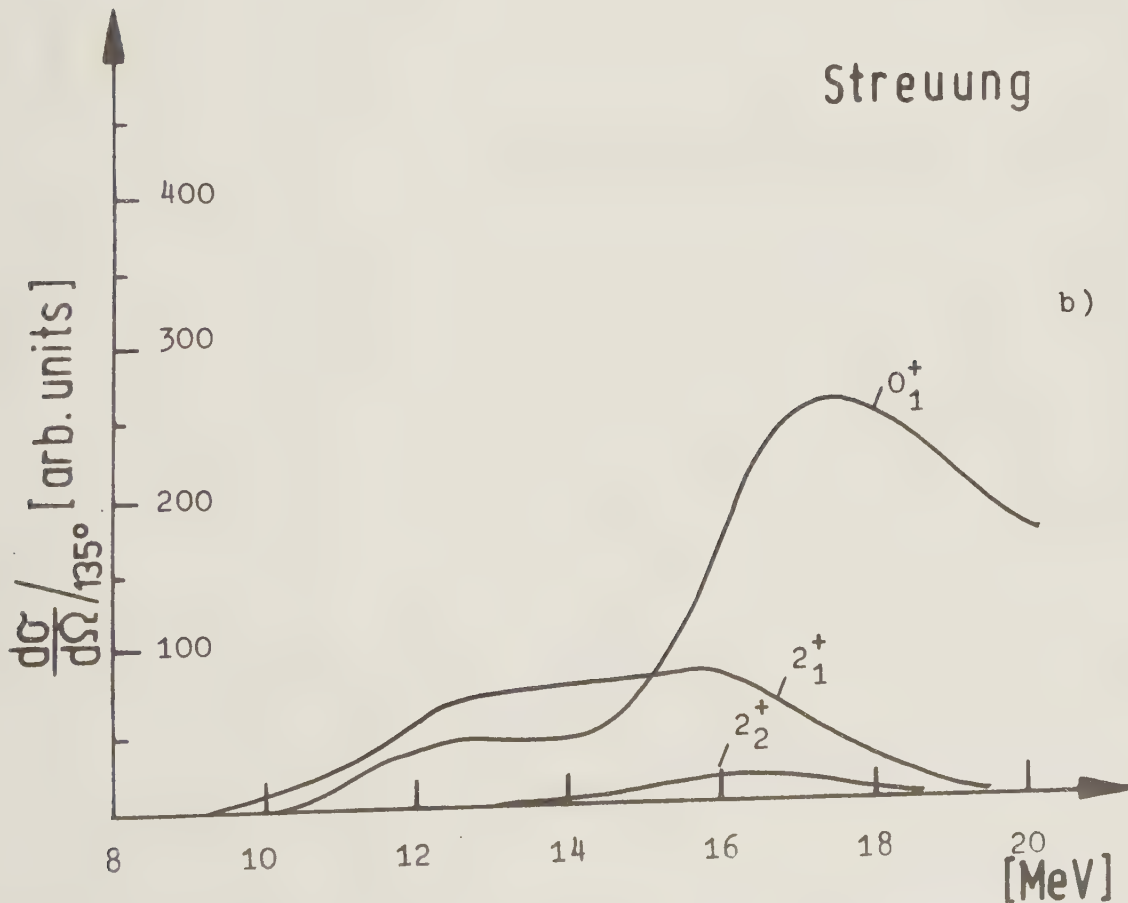
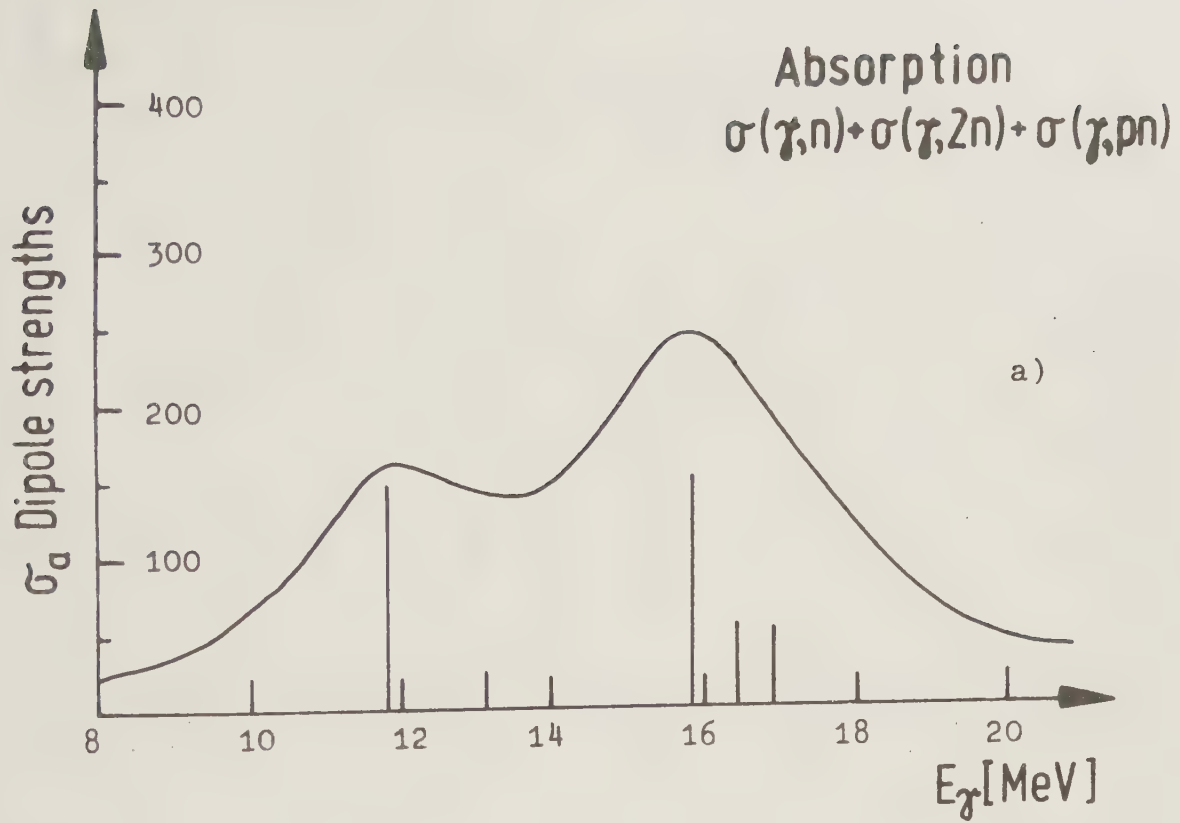


Fig. 84a E1-Absorptionsquerschnitt von ^{156}Gd
 Fig. 84b E1-Streuquerschnitte von ^{156}Gd

Fig. 84

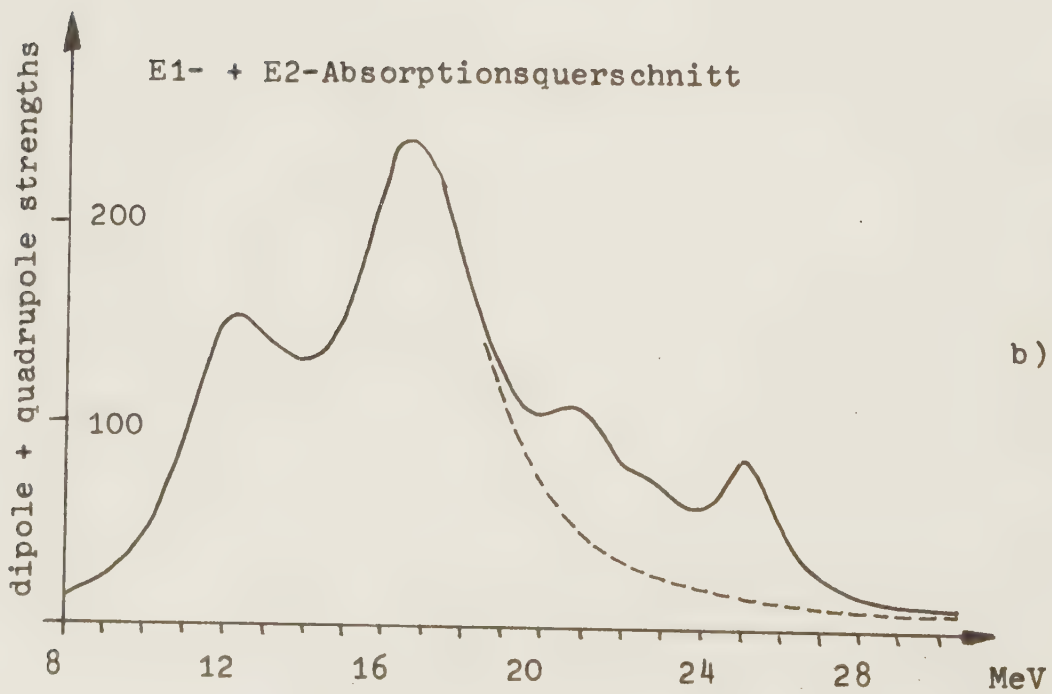
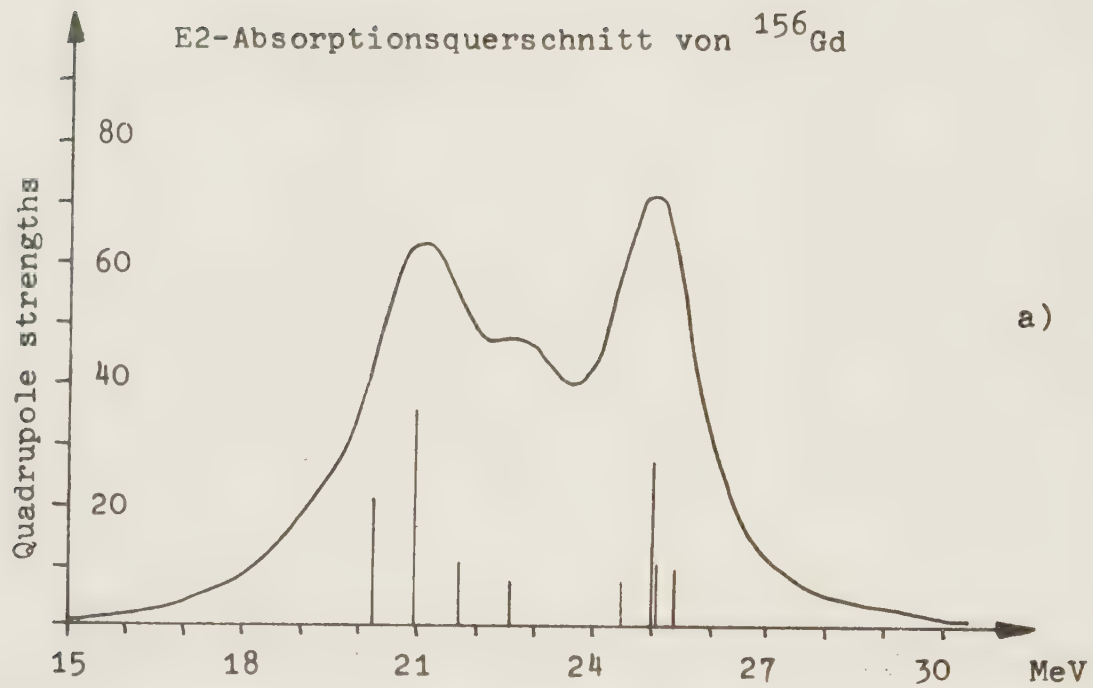


Fig. 85

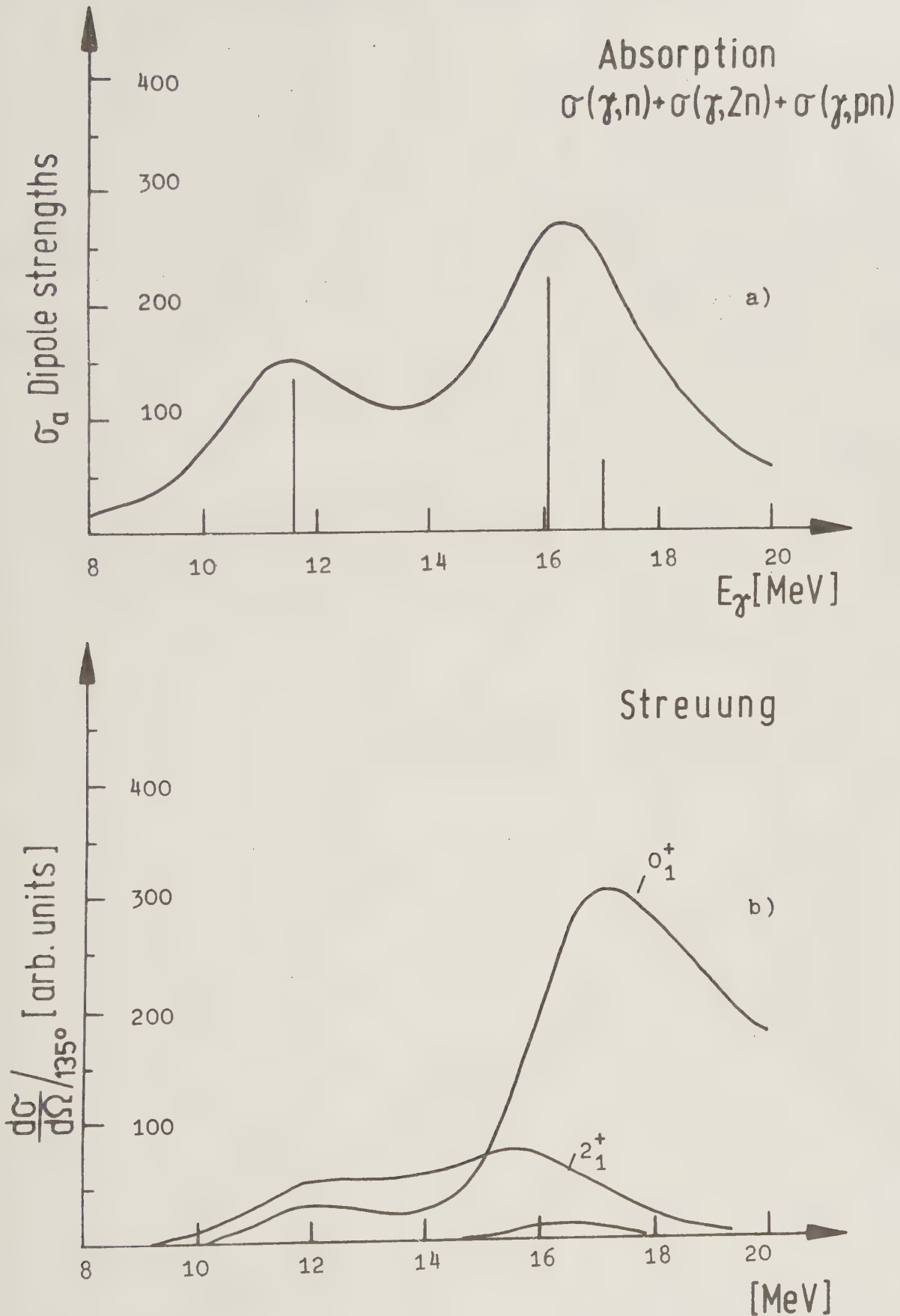
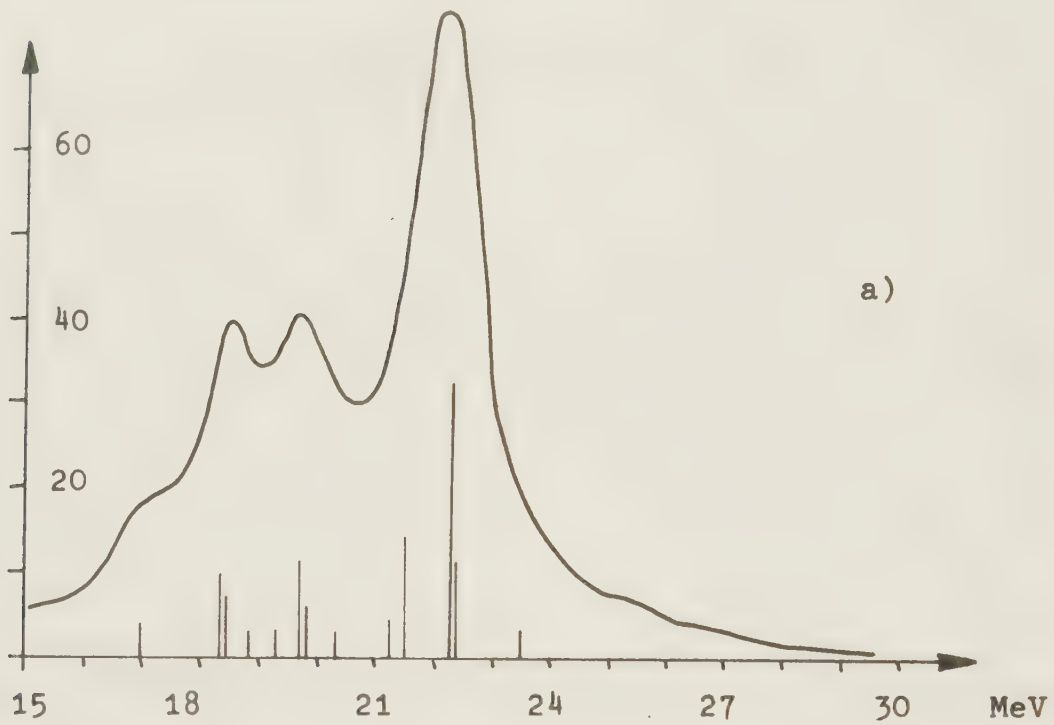


Fig. 86

Fig. 86a E1-Absorptionsquerschnitt von ^{160}Gd
 Fig. 86b E1-Streuquerschnitte

E2-Absorptionsquerschnitt von ^{160}Gd



E1- + E2-Absorptionsquerschnitt

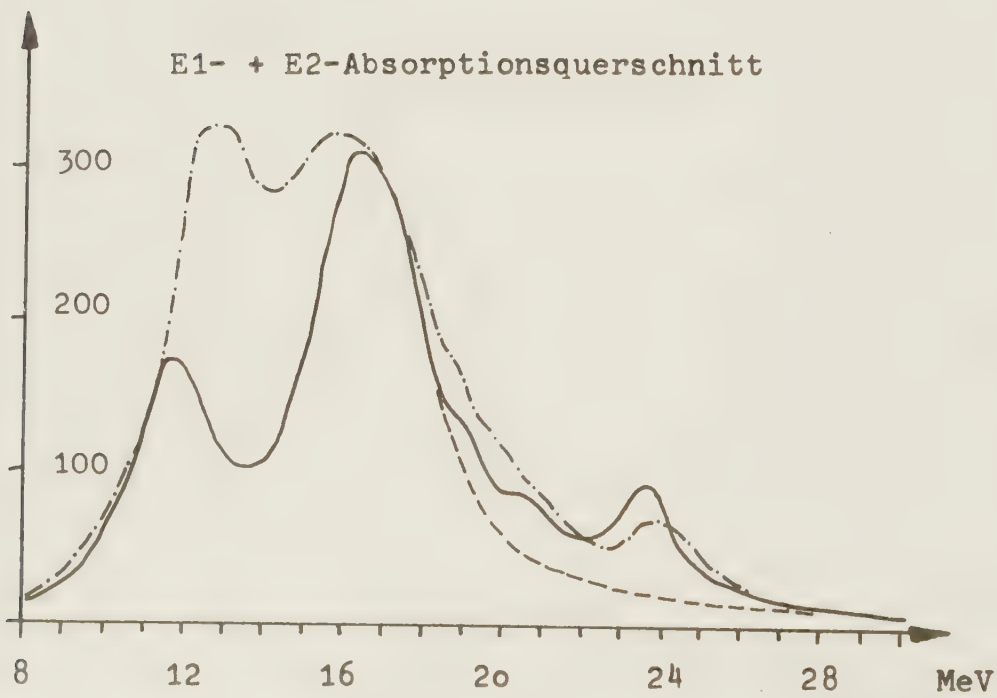


Fig. 87

5.5.3 Die Te-Isotope

Die PES der Te-Isotope in Fig. 88 zeigen zwei anharmonische Vibratoren und einen Kern mit sphärischem Grundzustand und einem zweiten prolaten Minimum.

Die Dipolriesenresonanzen in den Figuren 89, 92 und 95 zeigen demgemäß einen Verlauf, wie wir ihn schon mehrmals besprochen haben. Desgleichen die E2-Absorptionsquerschnitte, die in den Figuren 90, 93 und 96 abgebildet sind. Ein Vergleich mit experimentellen Daten²⁰ wird in den Figuren 91, 94 und 97 vorgenommen. Die durchgezogene Linie kennzeichnet die addierten E1- und E2-Absorptionsquerschnitte, wobei die gestrichelte Kurve den E1-Anteil bedeutet; die experimentellen Daten sind mit ϕ gekennzeichnet. Es zeigt sich sowohl im Dipol- als auch im Quadrupolbereich sehr gute Übereinstimmung. Die Breiten wurden für die Dipole mit $T_D = 2.5$ MeV und für die Quadrupole mit $T_Q = 0.7$ MeV angesetzt.

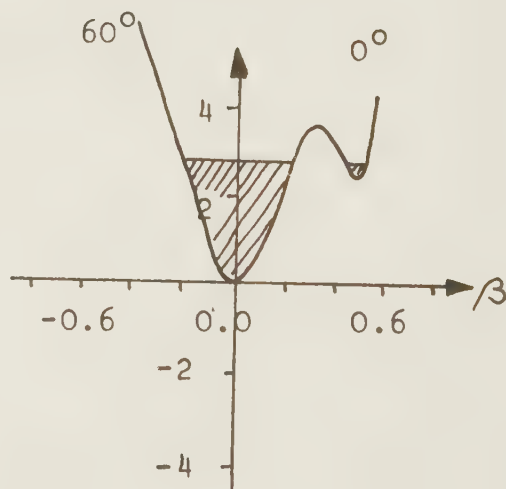
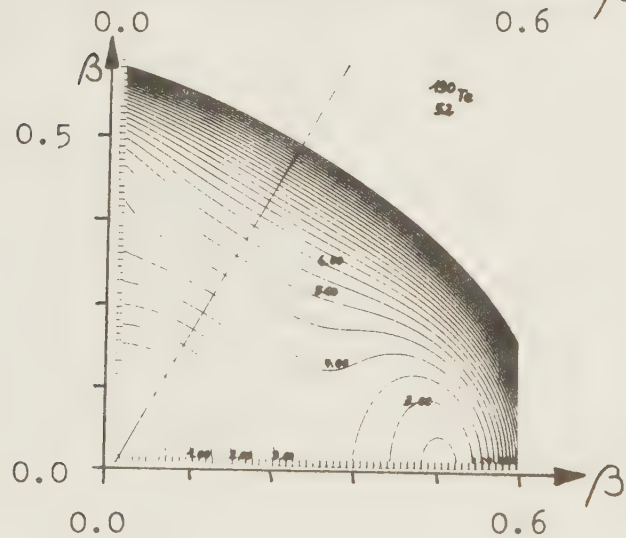
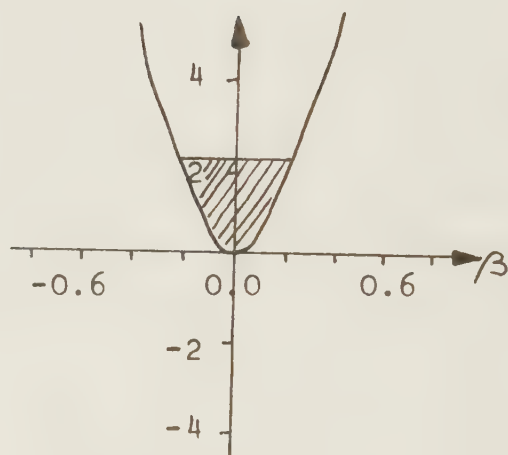
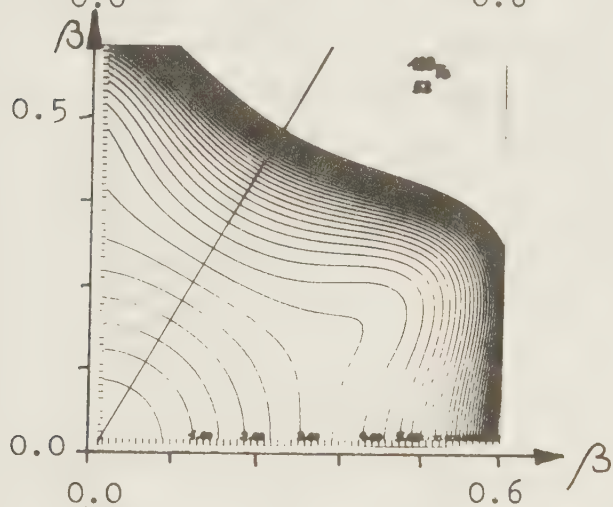
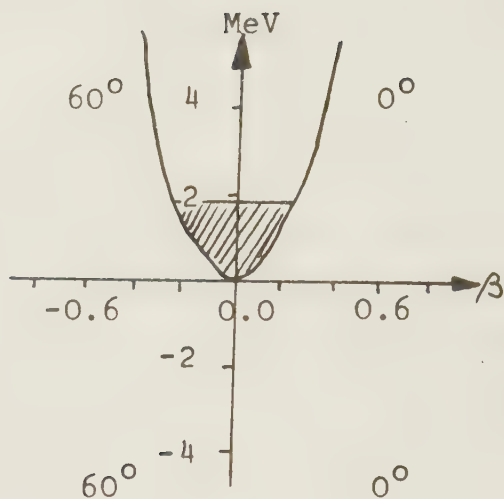
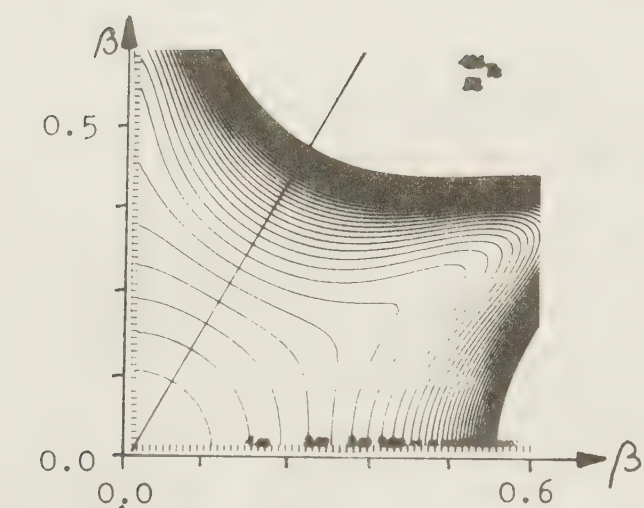


Fig. 88

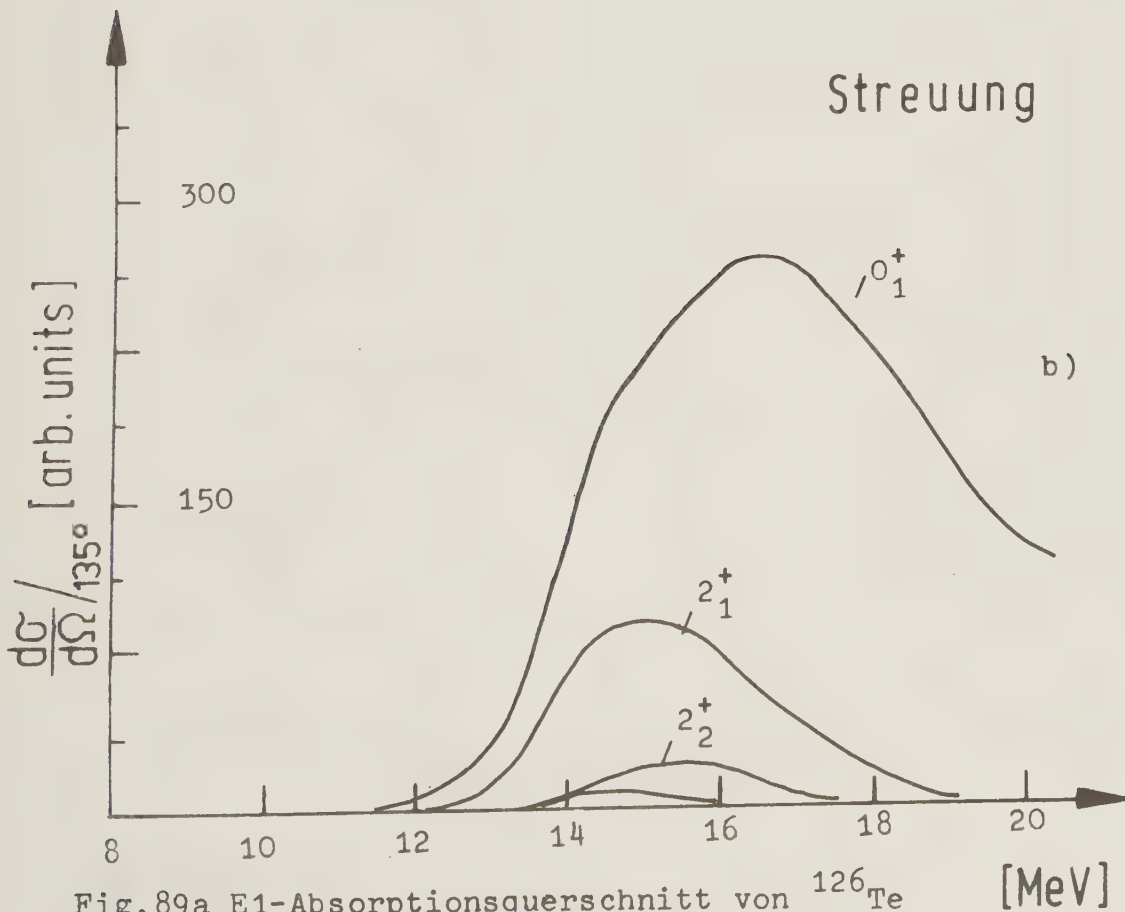
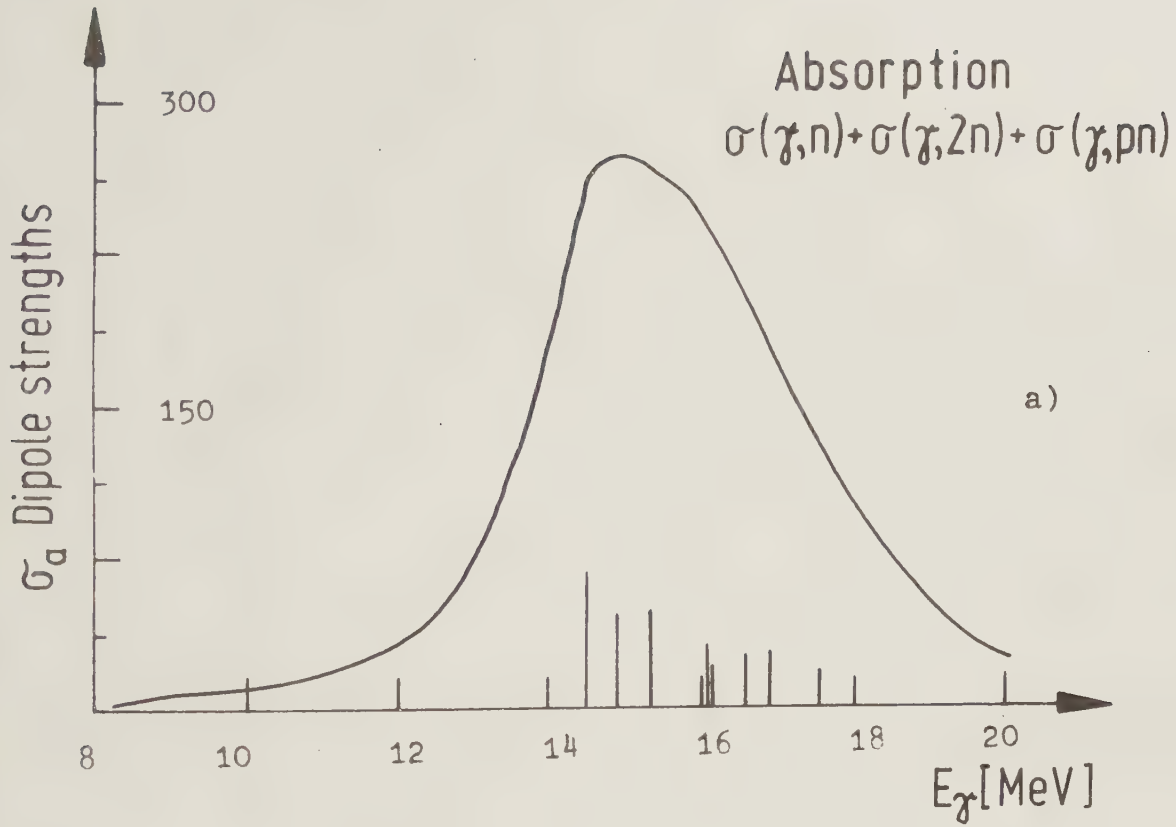


Fig. 89a E1-Absorptionsquerschnitt von ^{126}Te

Fig. 89b E1-Streuquerschnitte von ^{126}Te

Fig. 89



Fig. 90

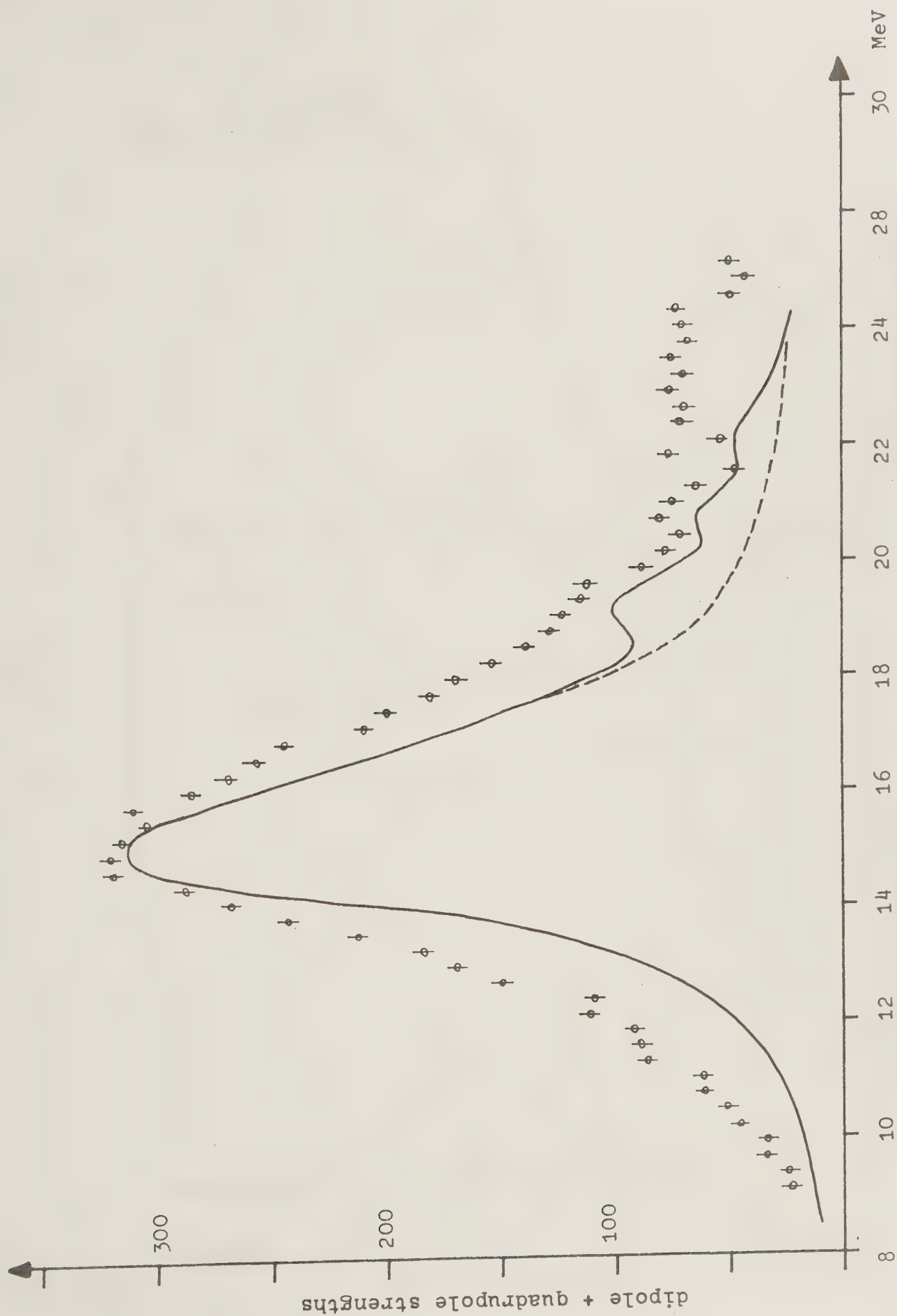


Fig. 91

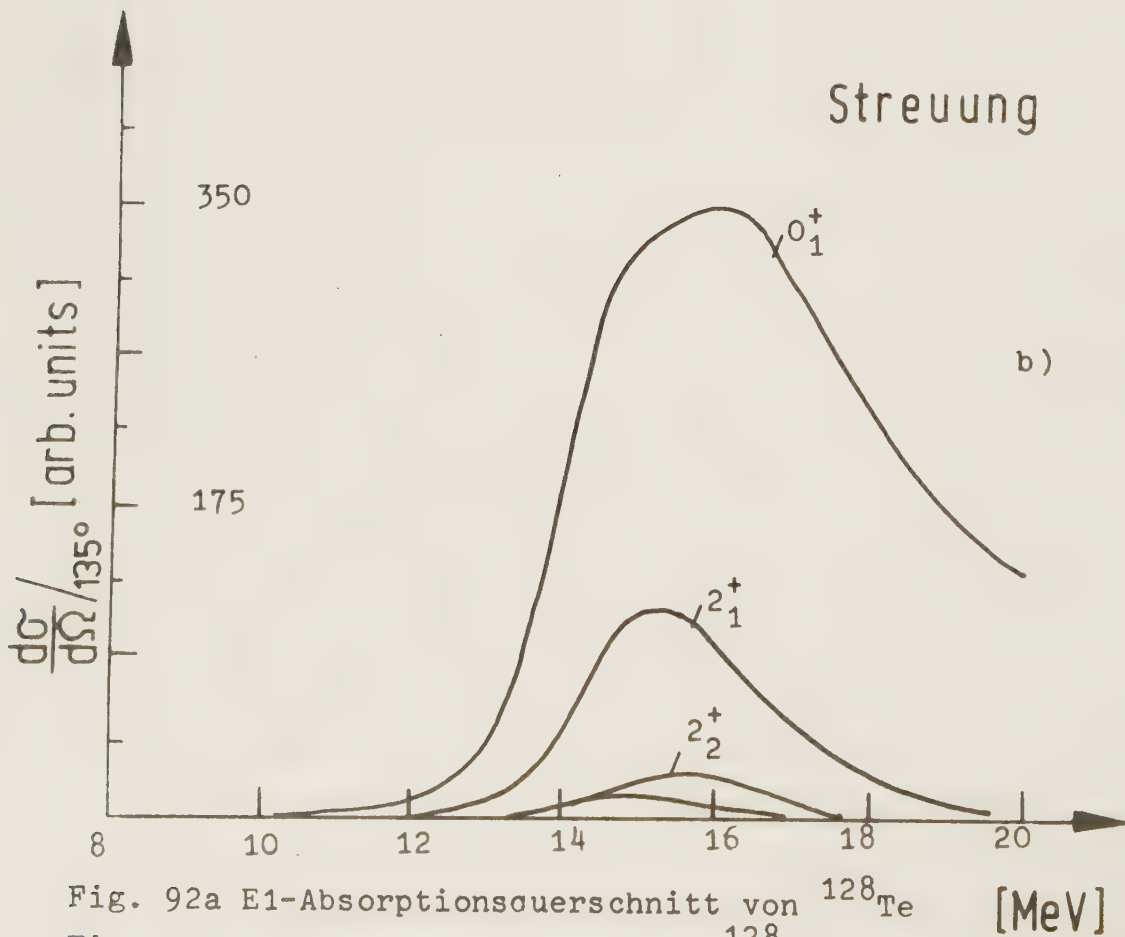
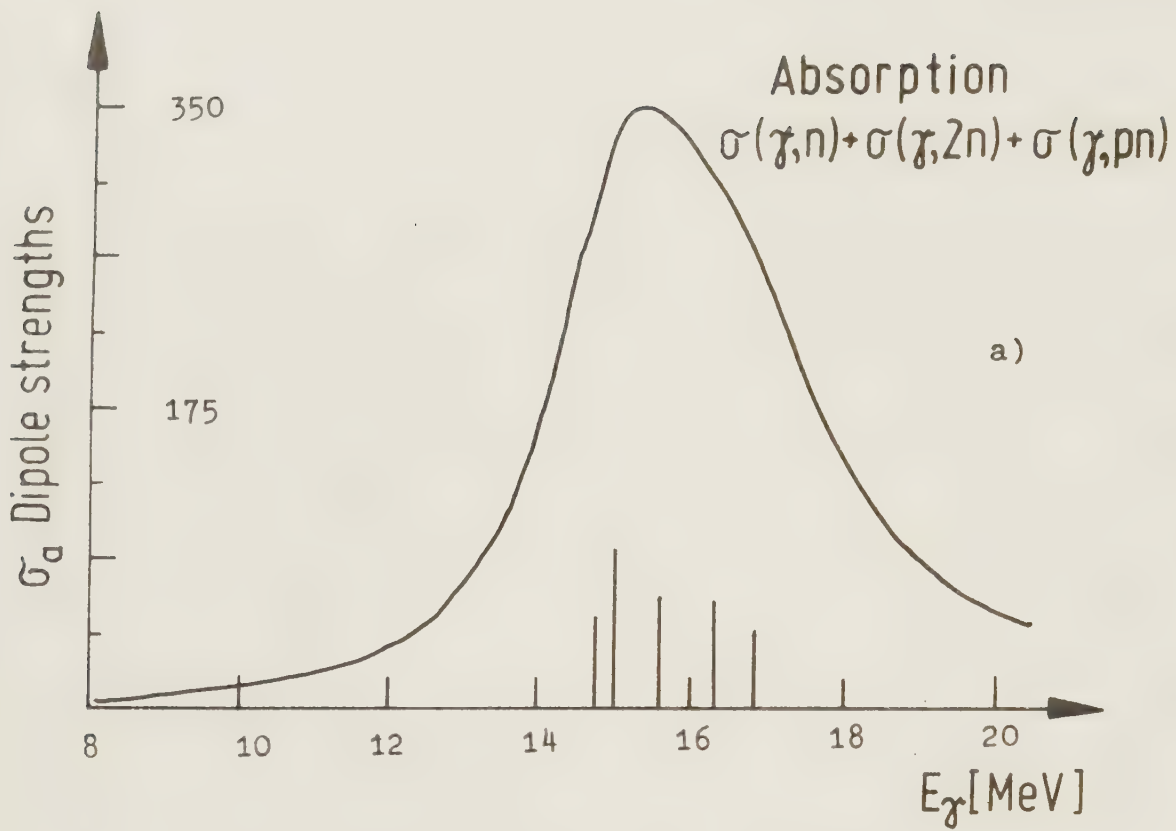


Fig. 92a E1-Absorptionsquerschnitt von ^{128}Te

Fig. 92b E1-Streuquerschnitte von ^{128}Te

[MeV]

Fig. 92

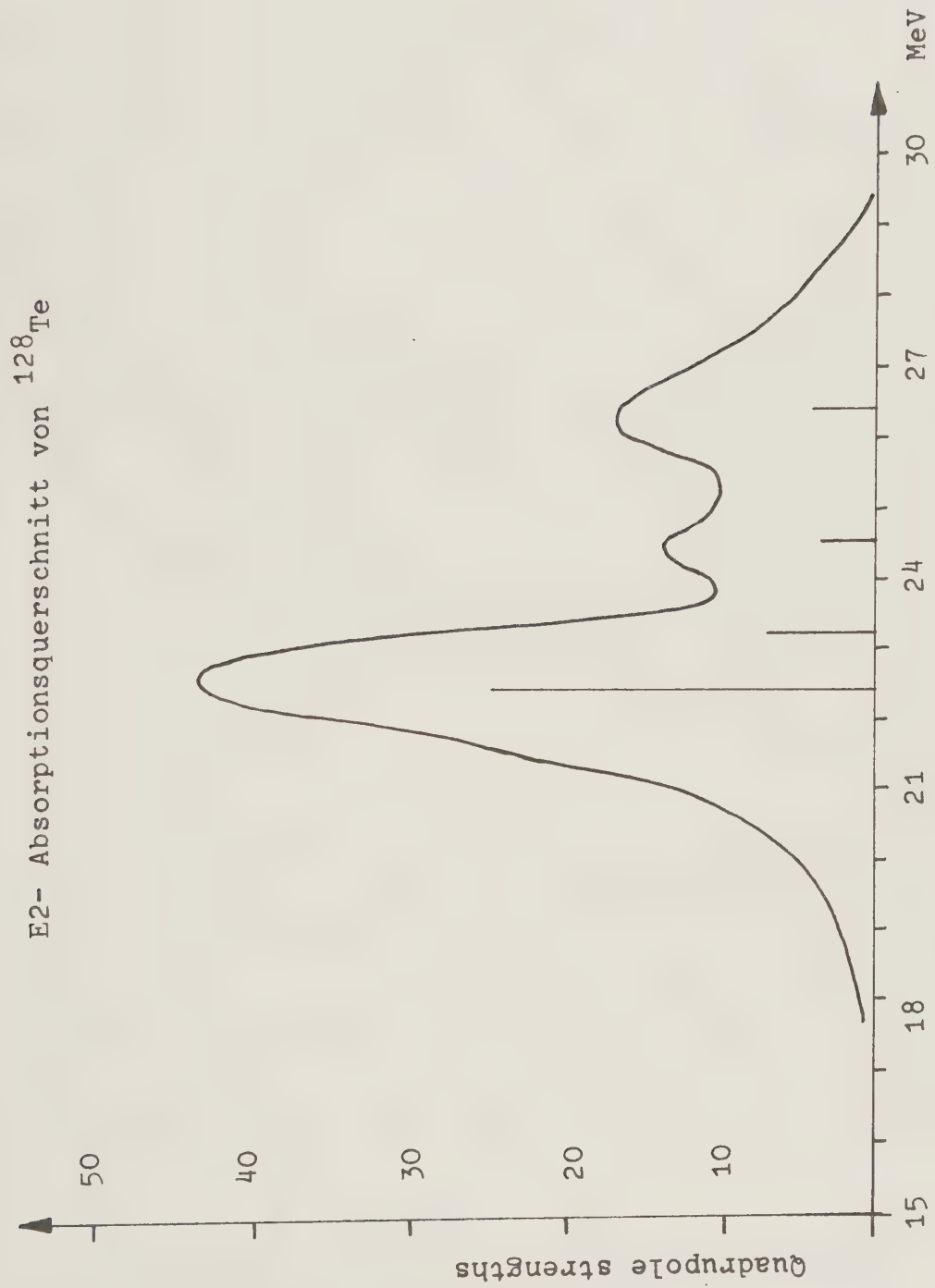


Fig. 93

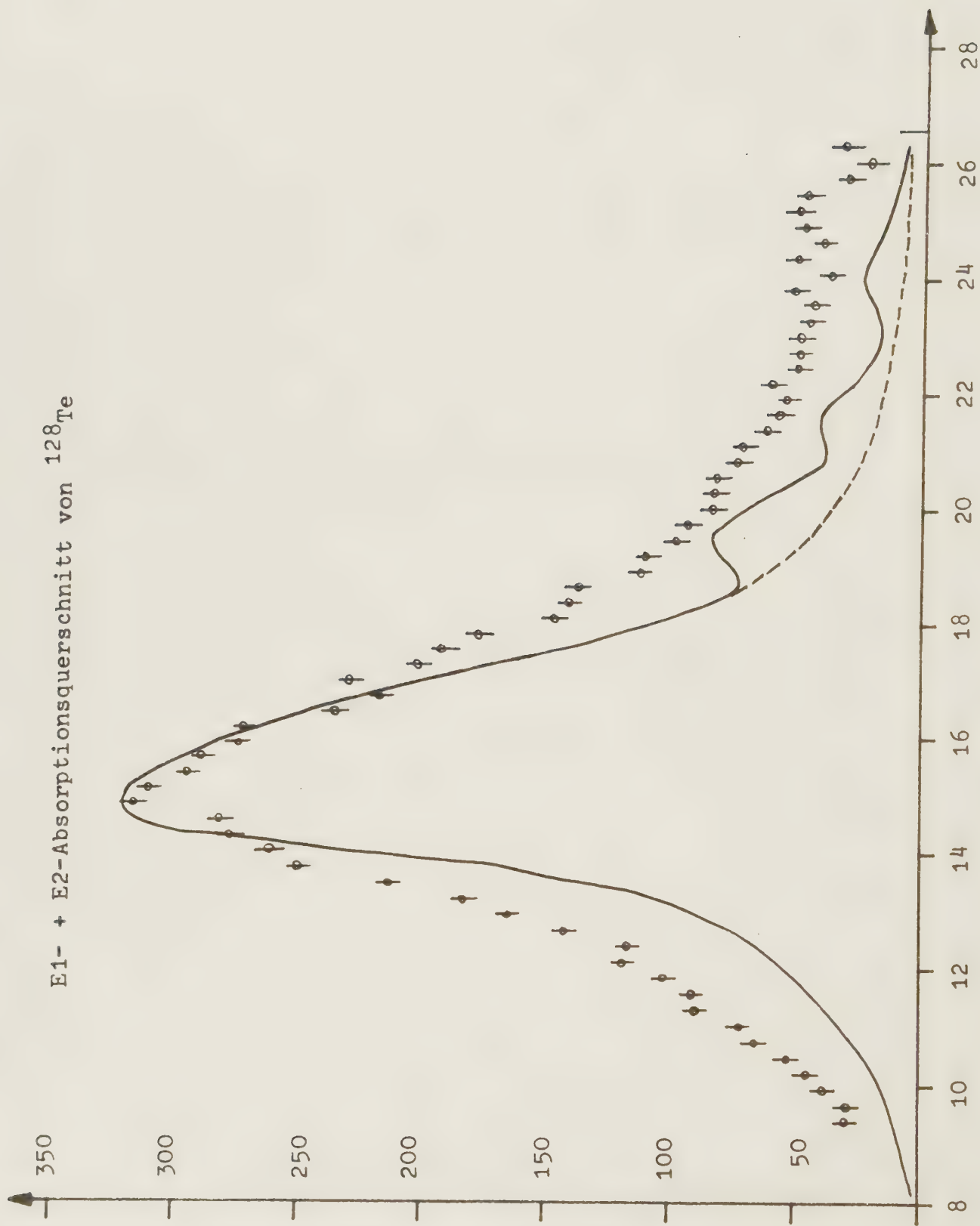


Fig. 94

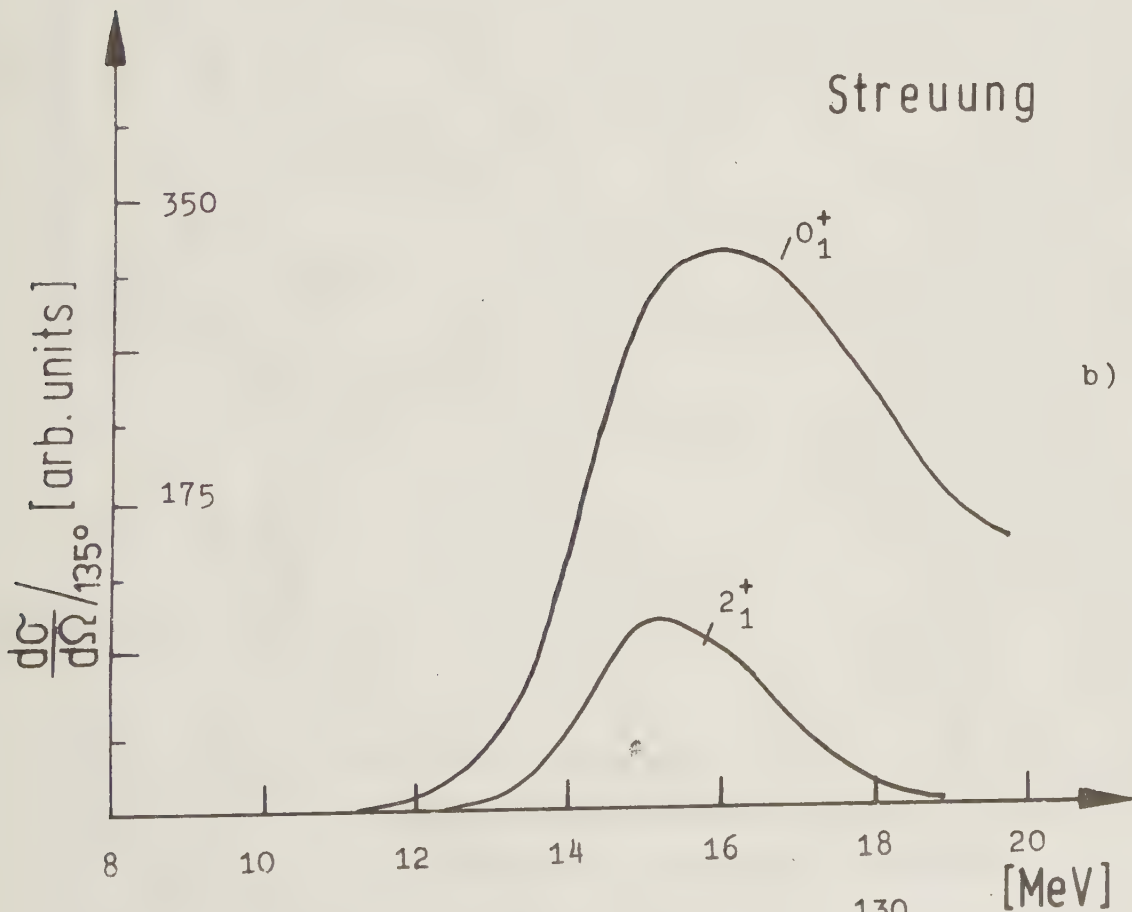
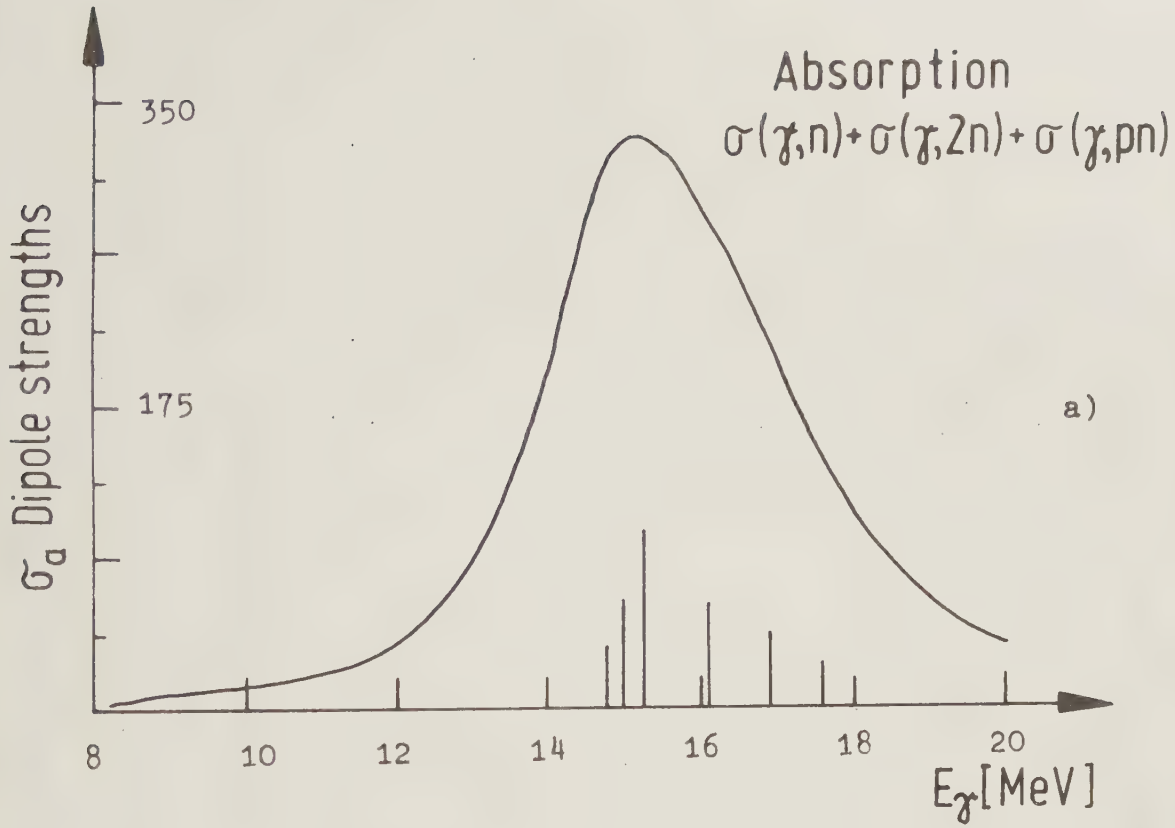


Fig. 95a E1-Absorptionsquerschnitte von ^{130}Te

Fig. 95b E1-Streuquerschnitte von ^{130}Te

Fig. 95

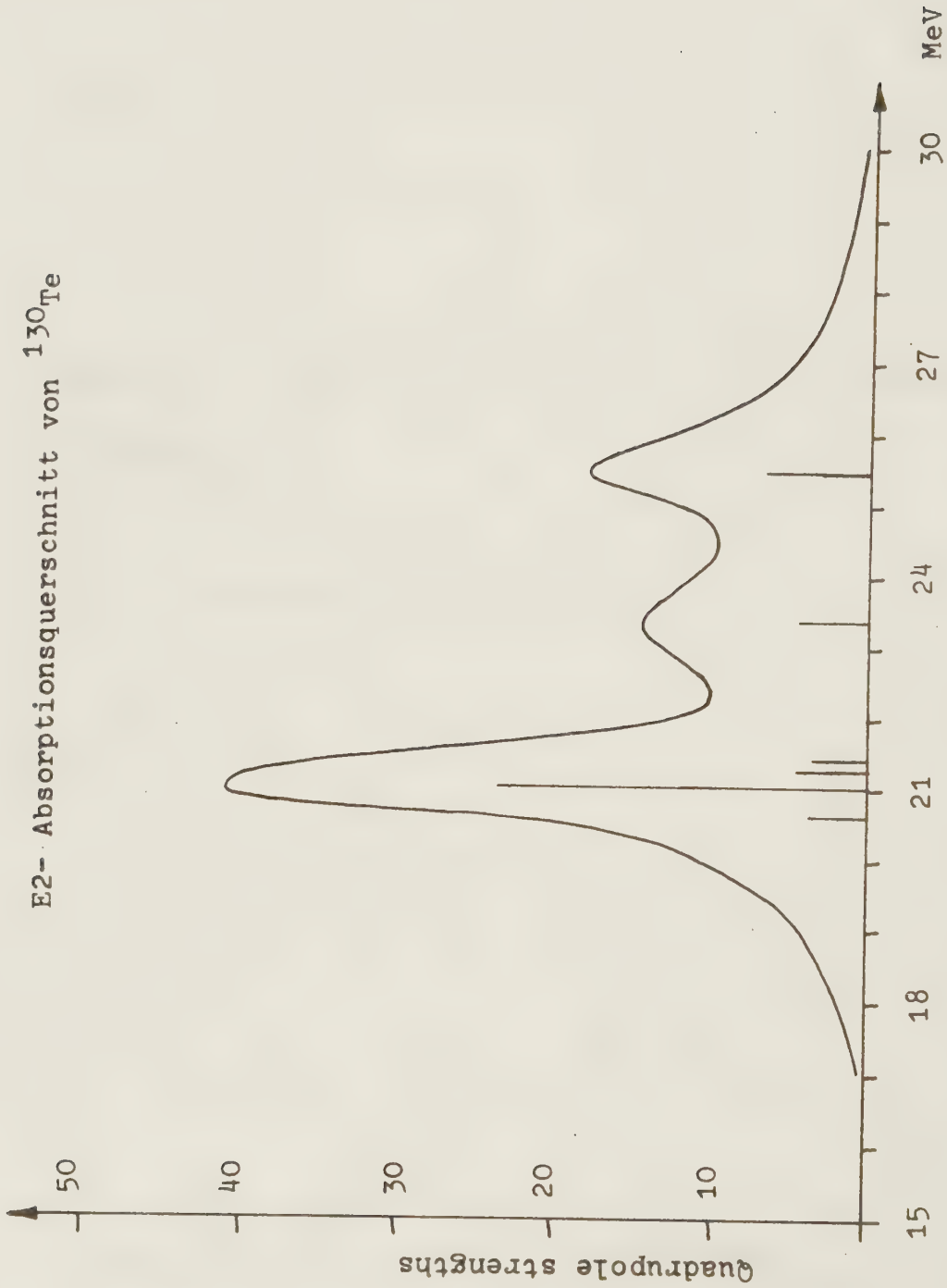


Fig. 96

E1- + E2- Absorptionsquerschnitt von ^{130}Te

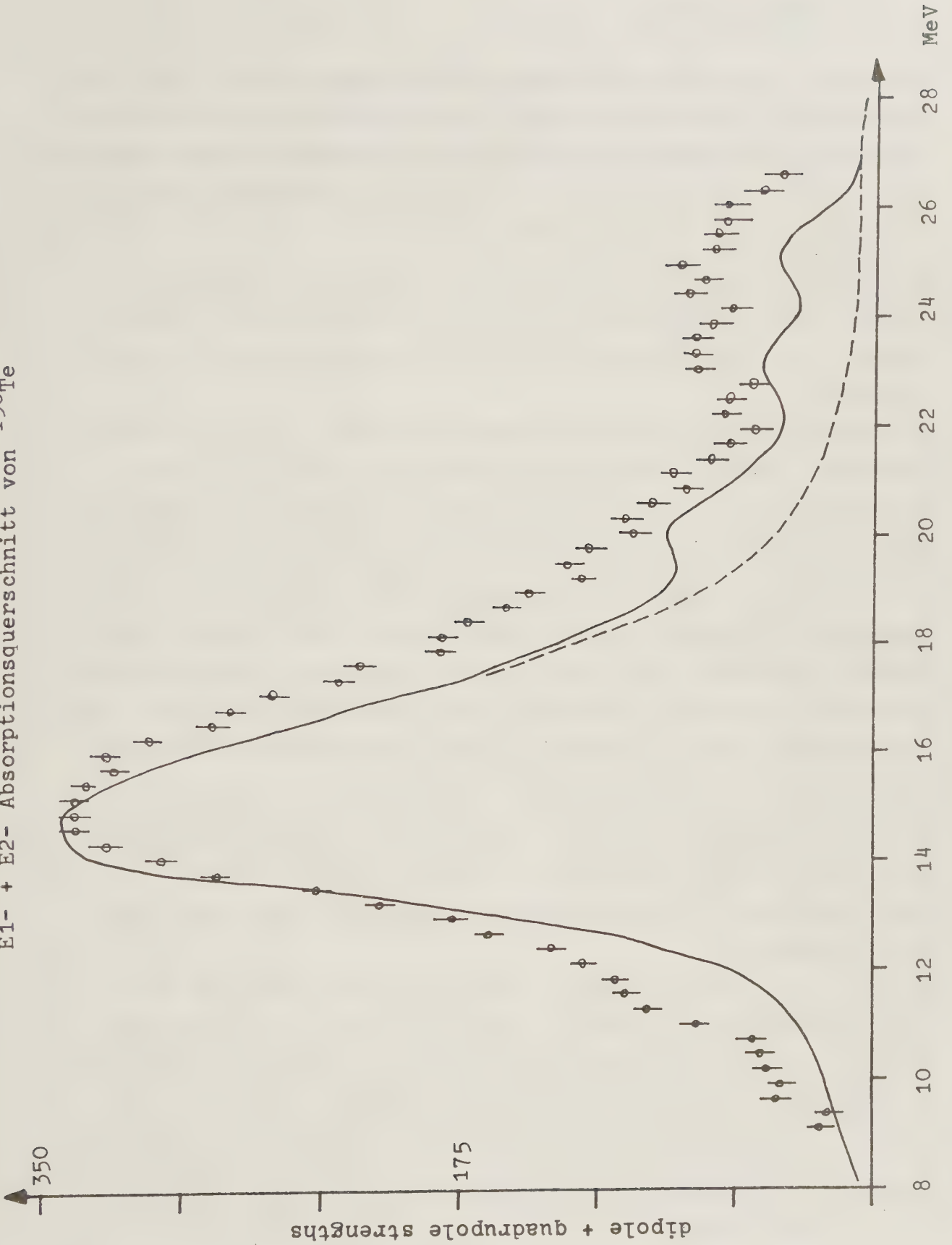


Fig. 97

5.6 Zusammenfassung

In dieser Arbeit ist das Dynamische Kollektivmodell, das bisher nur eine Beschreibung der Dipolriesenresonanzen ermöglichte, auf die Beschreibung der Quadrupolriesenresonanzen erweitert worden. Damit wird ein Energiebereich zwischen 20 und 28 MeV erschlossen, der sich unmittelbar an die Dipolriesenresonanzen anschließt.

Dieses Modell ist gut geeignet, die Quadrupolriesenresonanzen (QGR) nicht nur für Vibrationskerne und asymmetrische Kreisel, sondern auch für die Kerne aus den Übergangsbereichen zu beschreiben.

Die Struktur des E2-Absorptionsquerschnittes für einen anharmonischen Vibrator zeigt vorwiegend einen dominanten Peak, jedoch spalten die Quadrupolstärken auf Grund der Wechselwirkung in viele Linien; für prolate und oblate Kerne ergaben sich drei dominante Peaks im Absorptionsquerschnitt entlang zweier entarteter und einer nichtentarteten Schwingungsachse. Für prolate Kerne liegt der energetisch kleinste Peak oberhalb des ersten entarteten Peaks, bei oblaten Kernen ist der Sachverhalt umgekehrt. Der zweite entartete Peak behält seine Lage auf der Energieskala etwa bei, wenn man durch Vorzeichenänderung aus einem prolaten einen oblaten Kern macht.

Bei asymmetrischen Kreileln wird die Entartung bezüglich der Schwingungsachsen aufgehoben und es zeigen sich fünf Peaks. Diese Aufspaltung entspricht den Erwartungen⁸.

Der Vergleich mit experimentellen Daten zeigt eine sehr gute Übereinstimmung.

Mit Hilfe der von Sedlmayr¹⁶ ermittelten Parameter für den Niederenergiehamiltonoperator wäre es möglich, für große Bereiche des gg-Periodensystems die E2-Absorptionsquerschnitte zu berechnen. Allerdings ist das vorliegende experimentelle Datenmaterial auf Grund der schwierigen Messung noch recht unvollständig und im Quadrupolbereich mit großen Fehlergrenzen verbunden. Hier wäre in der Zukunft eine umfangreichere Information wünschenswert.

Um für starke Rotationskerne eine bessere Konvergenz zu erzielen, müßte das Modell auf 40 bis 50 Phononen erweitert werden. Eine weitere mögliche Erweiterung wäre die Ankopplung des Wechselwirkungshamiltonoperators zwischen Dipol- und Quadrupolschwingungen, die allerdings keine wesentlich neue Information liefern würde.

6. Anhang

6.1. Mathematische Formeln

Dieser Teil beschäftigt sich mit Relationen und Kopplungsmöglichkeiten der Kugelflächenfunktionen.

$$\begin{aligned}
 & Y_m^{[l]}(\vartheta, \varphi) Y_{m'}^{[l']}(\vartheta, \varphi) = \\
 & = \sum_{\sigma, \tau} \sqrt{\frac{(2l+1)(2l'+1)(2\sigma+1)}{4\pi}} (-)^{\tau} \begin{pmatrix} l & l' & \sigma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & l' & \sigma \\ m & m' & -\tau \end{pmatrix} Y_{\tau}^{[\sigma]}(\vartheta, \varphi) \quad (6.1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{pmatrix} = \\
 & = \sum_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} (-)^{l_1+l_2+l_3+\mu_1+\mu_2+\mu_3} \begin{pmatrix} j_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & \mu_2 & -\mu_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & j_2 & l_3 \\ -\mu_1 & m_2 & \mu_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & j_3 \\ \mu_1 & -\mu_2 & m_3 \end{pmatrix} \quad (6.2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int Y_{m_1}^{[l_1]}(\vartheta) Y_{m_2}^{[l_2]}(\vartheta) Y_{m_3}^{[l_3]}(\vartheta) = \\
 & = \sqrt{\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l_3+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \quad (6.3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & [A^{[j_1]} \times Y^{[j_2]}]^{[0]} \times [B^{[j_2]} \times Y^{[j_2]}]^{[0]} = \\
 & = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sum_{\sigma, \tau} (-)^{\tau} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \sigma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (-)^{j_1-j_2-\tau} \sqrt{2\sigma+1} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \sigma \\ m_1 & m_2 & \tau \end{pmatrix} A_{m_1}^{[j_1]} B_{m_2}^{[j_2]} Y_{\tau}^{[\sigma]} \quad (6.4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & [Y^{[j_1]} \times Y^{[j_2]}]_{m_3}^{[j_3]} = \\
 & = (-)^{j_1-j_2-m_3} \sqrt{2j_3+1} \sum_{\sigma, \tau} \sqrt{\frac{(2j_1+1)(2j_2+1)(2\sigma+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \sigma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \\
 & \cdot (-)^{\tau} Y_{\tau}^{[\sigma]} \sum_{m_1, m_2} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & -m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \sigma \\ m_1 & m_2 & -\tau \end{pmatrix} = \\
 & = (-)^{j_1-j_2} \sqrt{\frac{(2j_1+1)(2j_2+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y_{m_3}^{[j_3]} \quad (6.5)
 \end{aligned}$$

$$\text{mit : } \sum_{m_1, m_2} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & -m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \sigma \\ m_1 & m_2 & -\tau \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2j_3+1}} \delta_{j_3\sigma} \delta_{m_3\tau}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[\gamma^{[j_1]} \times \left[\alpha^{[\lambda]} \times \gamma^{[\lambda']} \right]^{[j_2]} \right]^{[j_3]}_{m_3} = \\
 & = (-)^{j_2 + \lambda - \lambda'} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sqrt{2j_2 + 1} \sqrt{2j_1 + 1} \sqrt{2\lambda' + 1} \cdot \\
 & \cdot \sum_{\sigma} (-)^{\sigma} \begin{pmatrix} j_1 & \lambda' & \sigma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda & j_3 & \sigma \\ j_1 & \lambda' & j_2 \end{Bmatrix} \sqrt{2\sigma + 1} \left[\alpha^{[\lambda]} \times \gamma^{[\sigma]} \right]^{[j_3]}_{m_3} \quad (6.6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ 0 & j_3 & j_2 \end{Bmatrix} = (-)^{j_1 + j_2 + j_3} \left[(2j_2 + 1)(2j_3 + 1) \right]^{-1/2} \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned}
 & \int d\Omega \left[\left[A^{[e]} \times \gamma^{[e]} \right]^{[0]} \times \gamma^{[L]} \right]^{[L]}_M = \\
 & = \sum_m \begin{pmatrix} \ell & \ell & 0 \\ m & -m & 0 \end{pmatrix} A_m^{[e]} \int d\Omega \gamma_{-m}^{[e]} \gamma_M^{[L]} \quad (6.8) \\
 & = \frac{(-)^{\ell}}{\sqrt{2\ell + 1}} \delta_{\ell L} A_M^{[L]}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int d\Omega \left[A^{[e]} \times \gamma^{[e]} \right]^{[0]} \times \left[\left[\alpha^{[\lambda]} \times \gamma^{[\lambda]} \right]^{[0]} \times \gamma^{[L]} \right]^{[L]}_M = \quad (6.9) \\
 & = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} \ell & \lambda & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left[A^{[e]} \times \alpha^{[\lambda]} \right]^{[L]}_M
 \end{aligned}$$

$$\int d\Omega \left[A^{[e]} \times \gamma^{[e]} \right]^{[0]} \times \left[A^{[e']} \times \gamma^{[e']} \right]^{[0]} = \delta_{ee'} \frac{(-)^{\ell}}{\sqrt{2\ell + 1}} \left[A^{[e]} \times A^{[e']} \right]^{[0]} \quad (6.10)$$

Gradientenformel:

$$\begin{aligned}
 & \nabla f(r) \left[A^{[e]} \times \gamma^{[e]} \right]^{[0]} = \\
 & = \sqrt{\frac{\ell}{2\ell + 1}} \left(\frac{\ell + 1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \right) f(r) \left[A^{[e]} \times \left[\gamma^{[\ell-1]} \times \gamma^{[1]} \right]^{[e]} \right]^{[0]} \quad (6.11) \\
 & + \sqrt{\frac{\ell + 1}{2\ell + 1}} \left(\frac{\ell}{r} - \frac{\partial}{\partial r} \right) f(r) \left[A^{[e]} \times \left[\gamma^{[\ell+1]} \times \gamma^{[1]} \right]^{[e]} \right]^{[0]}
 \end{aligned}$$

6.2. Berechnung der Matrixelemente

In diesem Kapitel wird die Berechnung der Matrixelemente der Hamiltonoperatoren und der Multipoloperatoren vorgenommen.

Zunächst einige in den Rechnungen benutzte Formeln:

$$\begin{aligned} \langle \tau_1 \tau_2 j_1 j_2 j_M | T^{[k]} \times U^{[k']} | \tau_1' \tau_2' j_1' j_2' j_M' \rangle = \\ = \delta_{j j'} \delta_{M M'} (-)^{j+j_1+j_2} \begin{Bmatrix} j_1 & k & j_1' \\ j_2' & j & j_2 \end{Bmatrix} \langle \tau_1 j_1 || T^{[k]} || \tau_1' j_1' \rangle \langle \tau_2 j_2 || U^{[k']} || \tau_2' j_2' \rangle \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned} \langle \tau_1 \tau_2 || [T^{[k_1]} \times U^{[k_2]}]^{[k]} || \tau_1' \tau_2' j_1' j_2' j' \rangle = \hat{j} \hat{k} \hat{j}' \begin{Bmatrix} j_1' & j_2' & j' \\ k_1 & k_2 & k \\ j_1 & j_2 & j \end{Bmatrix} \cdot \\ \cdot \langle \tau_1 j_1 || T^{[k_1]} || \tau_1' j_1' \rangle \langle \tau_2 j_2 || U^{[k_2]} || \tau_2' j_2' \rangle \\ \langle \tau_1 j_1 || [T^{[k_1]} \times T^{[k_2]}]^{[k]} || \tau_2 j_2 \rangle = \hat{k} (-)^{k+j_1+j_2} \sum_{\tau' j'} \begin{Bmatrix} k_1 & k_2 & k \\ j_1 & j_2 & j' \end{Bmatrix} \cdot \\ \langle \tau_1 j_1 || T^{[k_1]} || \tau' j' \rangle \langle \tau' j' || T^{[k_2]} || \tau_2 j_2 \rangle \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned} \langle \tau_1 j_1 M_1 | T_{k\mu} | \tau_2 j_2 M_2 \rangle = (-)^{j_1-M_1} \begin{pmatrix} j_1 & k & j_2 \\ -M_1 & \mu & M_2 \end{pmatrix} \langle \tau_1 j_1 || T^{[k]} || \tau_2 j_2 \rangle \\ \langle \tau_1 j_1 || \hat{I} || \tau_2 j_2 \rangle = \delta_{\tau_1 \tau_2} \delta_{j_1 j_2} \hat{I}_2 \end{aligned} \quad (6.14)$$

Für die Matrixelemente von H_D ergibt sich:

$$\begin{aligned} -\sqrt{3} E_1 \langle N_1' l_1' N_2' l_2' j_1' j_2' j_1' M' | [q^{[1]} \times q^{[1]}]^{[0]} | N_1 l_1 N_2 l_2 j_2 j_1 j_1' M \rangle = \\ = -\sqrt{3} E_1 \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ l_1 & 1 & l_2' \end{Bmatrix} \langle N_2 j_2 j_2 || \hat{I}^{[0]} || N_2 j_2 j_2 \rangle \langle 11 || q^{[1]} \times q^{[1]} || 11 \rangle \quad (6.15) \\ = -E_1 \sum_{\substack{N=0, L=0 \\ N=2, L=0, 2}} \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & L \end{Bmatrix} \langle 11 || q^{[1]} || NL \rangle \langle NL || q^{[1]} || 11 \rangle = E_1 \end{aligned}$$

Für die Matrixelemente von H_Q ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \sqrt{5} E_2 \langle N_1' l_1' N_2' l_2' l_2' 2^+ M \parallel [q^{+2}] \times q^{[2]}]^{[0]} \parallel N_1 l_1 N_2 l_2 l_2 2^+ M' \rangle = \\ & = \sqrt{5} E_2 \left\{ \begin{matrix} 2 & 0 & 2 \\ l_1 & 2 & l_1' \end{matrix} \right\} \langle N_2 l_2 l_2 \parallel \hat{I}^{[0]} \parallel N_2 l_2 l_2 \rangle \langle 22 \parallel [q^{+2}] \times q^{[2]}]^{[0]} \parallel 22 \rangle \quad (6.16) \\ & = E_2 \sum_{\substack{N=0 \\ N=2}}^{\substack{L=0 \\ L=0,2,4}} \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & L \end{matrix} \right\} \langle 22 \parallel q^{[2]} \parallel NL \rangle \langle NL \parallel q^{[2]} \parallel 22 \rangle = E_2 \end{aligned}$$

Bei den Rechnungen wurde E_1 mit 15 MeV und E_2 mit 22 MeV angenommen.

Berechnung der Matrixelemente von $H_{D\alpha}$:

$$\begin{aligned} & E_1 B_1 [\alpha^{[2]} \times [q^{+1]} \times q^{[1]}]^{[2]}]^{[0]} : \\ & E_1 B_1 \langle N_1' l_1' N_2' l_2' l_2' 1^- M \parallel [\alpha^{[2]} \times [q^{+1]} \times q^{[1]}]^{[2]}]^{[0]} \parallel N_1 l_1 N_2 l_2 l_2 1^- M' \rangle = \\ & = \frac{1}{\sqrt{5}} (-)^{l_2'} E_1 B_1 \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ l_2 & 1 & l_2' \end{matrix} \right\} \langle N_2' l_2' l_2' \parallel \alpha^{[2]} \parallel N_2 l_2 l_2 \rangle \cdot \\ & \cdot \langle 11 \parallel [q^{+1]} \times q^{[1]}]^{[2]} \parallel 11 \rangle = (-)^{l_2'} E_1 B_1 \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ l_2 & 1 & l_2' \end{matrix} \right\} \cdot \quad (6.17) \\ & \cdot \langle N_2' l_2' l_2' \parallel \alpha^{[2]} \parallel N_2 l_2 l_2 \rangle \sum_{\substack{N=0 \\ N=2}}^{\substack{L=0 \\ L=0,2}} \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & L \end{matrix} \right\} \langle 11 \parallel q^{+1} \parallel NL \rangle \langle NL \parallel q^{[1]} \parallel 11 \rangle \\ & = (-)^{l_2'} E_1 B_1 \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ l_2 & 1 & l_2' \end{matrix} \right\} \langle N_2' l_2' l_2' \parallel \alpha^{[2]} \parallel N_2 l_2 l_2 \rangle \\ & = (-)^{l_2'} E_1 B_1 \sqrt{\frac{E_2}{2C_2}} \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ l_2 & 1 & l_2' \end{matrix} \right\} \langle N_2' l_2' l_2' \parallel \beta^{+2} + \beta^{[2]} \parallel N_2 l_2 l_2 \rangle \end{aligned}$$

Die Auswahlregel für reduzierte Matrixelemente der Operatoren β_n^+ und $(-)^n \beta_n$ läßt folgende vier Fälle zu:

$$\begin{aligned} \langle N-1, v-1, l' \parallel \beta \parallel N v l \rangle &= \sqrt{\frac{N+v+3}{2v+3}} \langle v-1, v-1, l' \parallel \beta \parallel v, v, l \rangle \\ \langle N-1, v+1, l' \parallel \beta \parallel N v l \rangle &= \sqrt{\frac{N-v}{2v+5}} \langle v+1, v+1, l' \parallel \beta^+ \parallel v, v, l \rangle \quad (6.18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle N+1, v-1, l' \parallel \beta^+ \parallel N v l \rangle &= \sqrt{\frac{N-v+2}{2v+3}} \langle v-1, v-1, l' \parallel \beta \parallel v, v, l \rangle \\ \langle N+1, v+1, l' \parallel \beta^+ \parallel N v l \rangle &= \sqrt{\frac{N+v+5}{2v+5}} \langle v+1, v+1, l' \parallel \beta^+ \parallel v, v, l \rangle \end{aligned}$$

$$E_1 B_{10} \left\{ \left[[q^{+11} \times q^{11}]^{[0]} \times [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]} \right]^{[0]} - \frac{\sqrt{3}}{2} [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]} \right\} :$$

$$E_1 B_{10} \langle N_1' \ell_1' N_2' \ell_2' 1^- M | \left[[q^{+11} \times q^{11}]^{[0]} \times [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]} \right]^{[0]} - \frac{\sqrt{3}}{2} [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]} | N_1 \ell_1 N_2 \ell_2 1^- M' \rangle =$$

$$= (-)^{\ell_2'} E_1 B_{10} \left\{ \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ \ell_2 & 1 & \ell_2' \end{matrix} \right\} \langle N_2' \ell_2' \ell_2' | [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]} | N_2 \ell_2 \ell_2 \rangle \cdot \left\{ \langle 11 | [q^{+11} \times q^{11}] | 11 \rangle - \frac{\sqrt{3}}{2} \langle 11 | \hat{I}^{[0]} | 11 \rangle \right\} = \quad (6.19)$$

$$= (-)^{\ell_2'} E_1 B_{10} \left\{ \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ \ell_2 & 1 & \ell_2' \end{matrix} \right\} \langle N_2' \ell_2' \ell_2' | [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]} | N_2 \ell_2 \ell_2 \rangle \cdot$$

$$\cdot \left\{ \sum_{\substack{N=0 \quad L=0 \\ N=2 \quad L=0,2}} \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & L \end{matrix} \right\} \langle 11 | q^{+11} | NL \rangle \langle NL | q^{11} | 11 \rangle - \frac{\sqrt{3}}{2} \right\} =$$

$$= -\frac{3}{2} (-)^{\ell_2'} E_1 B_{10} \left\{ \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ \ell_2 & 1 & \ell_2' \end{matrix} \right\} \langle N_2' \ell_2' \ell_2' | [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]} | N_2 \ell_2 \ell_2 \rangle$$

mit:

$$\sum_{\substack{N=0 \quad L=0 \\ N=2 \quad L=0,2}} \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & L \end{matrix} \right\} \langle 11 | q^{+11} | NL \rangle \langle NL | q^{11} | 11 \rangle =$$

$$= \frac{1}{3} \langle 11 | q^{+11} | 00 \rangle \langle 00 | q^{11} | 11 \rangle +$$

$$+ \frac{1}{3} \langle 11 | q^{+11} | 20 \rangle \langle 20 | q^{11} | 11 \rangle +$$

$$+ \frac{1}{3} \langle 11 | q^{+11} | 22 \rangle \langle 22 | q^{11} | 11 \rangle = \quad (6.20)$$

$$= -\frac{1}{3} \sqrt{3} \sqrt{3} \langle 11 | q^{+11} | 00 \rangle \langle 00 | q^{11} | 11 \rangle = 1$$

Nach ¹⁶ folgt:

$$\langle x' j' | T(k) | x j \rangle = \frac{1}{(-)^{j-m'} \begin{pmatrix} j' & k & j \\ -m' & k & m \end{pmatrix}} \langle x' j' m' | T(k, q) | x j m \rangle \quad (6.21)$$

Für die reduzierten $[\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]}$ -Terme gelten folgende Auswahlregeln:

$$\langle N \pm 2, v \pm 2, \ell m | [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]} | N v \ell m \rangle = 0$$

$$\langle N \pm 2, v \pm 1, \ell m | [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]} | N v \ell m \rangle = 0$$

$$\begin{aligned}
 \langle N, v \pm 2, \ell m \parallel [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]} \parallel N v \ell m \rangle &= 0 \\
 \langle N, v \pm 1, \ell m \parallel [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]} \parallel N v \ell m \rangle &= 0 \\
 \langle N+2, v, \ell m \parallel [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]} \parallel N v \ell m \rangle &= \\
 &= \frac{\hbar \omega_2}{2C_2} \sqrt{\frac{2\ell+1}{5} (N-v+2)(N+v+5)} \\
 \langle N-2, v, \ell m \parallel [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]} \parallel N v \ell m \rangle &= \\
 &= \frac{\hbar \omega_2}{2C_2} \sqrt{\frac{2\ell+1}{5} (N-v)(N+v+3)} \\
 \langle N, v, \ell m \parallel [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]} \parallel N v \ell m \rangle &= \frac{\hbar \omega_2}{2C_2} \sqrt{\frac{2\ell+1}{5} (2N+5)}
 \end{aligned} \tag{6.22}$$

Die endgültig programmierte Formel erfolgt nach Multiplikation mit dem Faktor $\frac{2}{5}$, der sich aus der Renormierung des Niederenergiequadrupols ergibt.

$$\begin{aligned}
 E_1 B_{12} &[[q^{+11} \times q^{11}]^{[2]} \times [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[2]}]^{[0]} : \\
 E_1 B_{12} \langle N_1' \ell_1' N_2' \ell_2' \ell_2', 1-M \parallel &[[q^{+11} \times q^{11}]^{[2]} \times [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[2]}]^{[0]} \parallel N_1 \ell_1 N_2 \ell_2 \ell_2, 1-M \rangle = \\
 = \frac{1}{\sqrt{5}} (-)^{\ell_2'} E_1 B_{12} \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ \ell_2 & 1 & \ell_2' \end{matrix} \right\} \langle N_2' \ell_2' \ell_2' \parallel &[\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[2]} \parallel N_2 \ell_2 \ell_2 \rangle \cdot \\
 \cdot \langle 11 \parallel [q^{+11} \times q^{11}]^{[2]} \parallel 11 \rangle &= (-)^{\ell_2} E_1 B_{12} \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ \ell_2 & 1 & \ell_2' \end{matrix} \right\} \langle N_2' \ell_2' \ell_2' \parallel [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[2]} \parallel N_2 \ell_2 \ell_2 \rangle \cdot \\
 \cdot \sum_{\substack{N=0 \quad L=0 \\ N=2 \quad L=0,2}} \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & L \end{matrix} \right\} \langle 11 \parallel q^{+11} \parallel NL \rangle \langle NL \parallel q^{11} \parallel 11 \rangle &= -\sqrt{5} (-)^{\ell_2'} \frac{E_2 E_1 B_{12}}{2C_2} \cdot \\
 \cdot \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ \ell_2 & 1 & \ell_2' \end{matrix} \right\} \sum_{N'' \ell_2'' \ell_2''} \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 & 2 \\ \ell_2' & \ell_2 & \ell_2'' \end{matrix} \right\} \langle N_2' \ell_2' \ell_2' \parallel \beta^{+21} + \beta^{21} \parallel N_2'' \ell_2'' \ell_2'' \rangle \cdot \\
 \cdot \langle N_2' \ell_2' \ell_2' \parallel \beta^{+21} + \beta^{21} \parallel N_2 \ell_2 \ell_2 \rangle
 \end{aligned} \tag{6.23}$$

Die Energiematrix des gesamten Hamiltonoperators wird mit Hilfe dieser Matrixelemente und den von Gneuss³ übernommenen Matrixelementen des Niederenergiequadrupols aufgestellt.

Während die in α_{μ} linearen Terme nur in den Nicht-Diagonalzonen beitragen, tragen die quadratischen Wechselwirkungsterme sowohl in den Diagonalzonen als auch in den Nicht-Diagonaltermen bei. Wegen der Hermitizität von H ist die Matrix symmetrisch.

Für die Matrixelemente von H_Q ergibt sich:

$$E_3 B_3 [\alpha^{[2]} \times [q^{+[2]} \times q^{[2]}]^{[2]}]^{[0]}:$$

$$\begin{aligned} E_3 B_3 \langle N_1 l_1 N_2 l_2 l_2', 2^+ M | [\alpha^{[2]} \times [q^{+[2]} \times q^{[2]}]^{[2]}]^{[0]} | N_1 l_1 N_2 l_2 l_2', 2^+ M' \rangle = \\ = \frac{1}{\sqrt{5}} (-)^{l_2'} E_3 B_3 \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 & 2 \\ l_2 & 2 & l_2' \end{matrix} \right\} \langle N_2 l_2 l_2' \| \alpha^{[2]} \| N_2 l_2 l_2 \rangle \langle 22 \| [q^{+[2]} \times q^{[2]}]^{[2]} \| 22 \rangle = \\ = (-)^{l_2'} E_3 B_3 \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 & 2 \\ l_2 & 2 & l_2' \end{matrix} \right\} \langle N_2 l_2 l_2' \| \alpha^{[2]} \| N_2 l_2 l_2 \rangle. \quad (6.24) \\ \sum_{\substack{N=0, L=0 \\ N=2, L=0, 2, 4}} \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & L \end{matrix} \right\} \langle 22 \| q^{+[2]} \| NL \rangle \langle NL \| q^{[2]} \| 22 \rangle = \\ = (-)^{l_2'} E_3 B_3 \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 & 2 \\ l_2 & 2 & l_2' \end{matrix} \right\} \langle N_2 l_2 l_2' \| \alpha^{[2]} \| N_2 l_2 l_2 \rangle \\ = (-)^{l_2'} E_3 B_3 \sqrt{\frac{E_2}{2C_2}} \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 & 2 \\ l_2 & 2 & l_2' \end{matrix} \right\} \langle N_2 l_2 l_2' \| \beta^{+[2]} + \beta^{[2]} \| N_2 l_2 l_2 \rangle \end{aligned}$$

Die Auswahlregeln erlauben folgende Fälle:

$$\begin{aligned} \langle N-1, v-1, e' \| \beta \| N v e \rangle &= \sqrt{\frac{N+v+3}{2v+3}} \langle v-1, v-1, e' \| \beta \| v v e \rangle \\ \langle N-1, v+1, e' \| \beta \| N v e \rangle &= \sqrt{\frac{N-v}{2v+5}} \langle v+1, v+1, e' \| \beta^+ \| v v e \rangle \end{aligned} \quad (6.25)$$

$$\begin{aligned} \langle N+1, v-1, e' \| \beta^+ \| N v e \rangle &= \sqrt{\frac{N-v+2}{2v+3}} \langle v-1, v-1, e' \| \beta \| v v e \rangle \\ \langle N+1, v+1, e' \| \beta^+ \| N v e \rangle &= \sqrt{\frac{N+v+5}{2v+5}} \langle v+1, v+1, e' \| \beta^+ \| v v e \rangle \end{aligned}$$

$$E_3 B_{20} \left\{ \left[\left[q^{+2} \times q^{2} \right]^{[0]} \times \left[\alpha^{21} \times \alpha^{21} \right]^{[0]} \right]^{[0]} + \frac{\sqrt{5}}{2} \left[\alpha^{21} \times \alpha^{21} \right]^{[0]} \right\} :$$

$$E_3 B_{20} \langle N_1' \ell_1' N_2' \ell_2' \ell_2, 2^+ M' | \left[\left[q^{+2} \times q^{2} \right]^{[0]} \times \left[\alpha^{21} \times \alpha^{21} \right]^{[0]} \right]^{[0]} + \frac{\sqrt{5}}{2} \left[\alpha^{21} \times \alpha^{21} \right]^{[0]} | N_1 \ell_1 N_2 \ell_2 \ell_2, 2^+ M' \rangle =$$

$$= (-)^{\ell_2'} E_3 B_{20} \left\{ \begin{matrix} 2 & 0 & 2 \\ \ell_2 & 2 & \ell_2' \end{matrix} \right\} \langle N_2' \ell_2' \ell_2' \| \left[\alpha^{21} \times \alpha^{21} \right]^{[0]} \| N_2 \ell_2 \ell_2 \rangle \cdot \left\{ \langle 22 \| q^{+2} \times q^{2} \| 22 \rangle + \frac{\sqrt{5}}{2} \langle 22 \| \hat{1}^{[0]} \| 22 \rangle \right\} = \quad (6.26)$$

$$= (-)^{\ell_2'} E_3 B_{20} \left\{ \begin{matrix} 2 & 0 & 2 \\ \ell_2 & 2 & \ell_2' \end{matrix} \right\} \langle N_2' \ell_2' \ell_2' \| \left[\alpha^{21} \times \alpha^{21} \right]^{[0]} \| N_2 \ell_2 \ell_2 \rangle \cdot$$

$$\cdot \left\{ \sum_{\substack{N=0 \quad L=0 \\ N=2 \quad L=0,2,4}} \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & L \end{matrix} \right\} \langle 22 \| q^{+2} \| NL \rangle \langle NL \| q^{21} \| 22 \rangle + \frac{5}{2} \right\} =$$

$$= \frac{7}{2} (-)^{\ell_2'} E_3 B_{20} \left\{ \begin{matrix} 2 & 0 & 2 \\ \ell_2 & 2 & \ell_2' \end{matrix} \right\} \langle N_2' \ell_2' \ell_2' \| \left[\alpha^{21} \times \alpha^{21} \right]^{[0]} \| N_2 \ell_2 \ell_2 \rangle$$

$$E_3 B_{22} \left[\left[q^{+21} \times q^{21} \right]^{[2]} \times \left[\alpha^{21} \times \alpha^{21} \right]^{[2]} \right]^{[0]} :$$

$$E_3 B_{22} \langle N_1' \ell_1' N_2' \ell_2' \ell_2', 2^+ M' | \left[\left[q^{+21} \times q^{21} \right]^{[2]} \times \left[\alpha^{21} \times \alpha^{21} \right]^{[2]} \right]^{[0]} | N_1 \ell_1 N_2 \ell_2 \ell_2, 2^+ M' \rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} (-)^{\ell_2'} E_3 B_{22} \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 & 2 \\ \ell_2 & 2 & \ell_2' \end{matrix} \right\} \langle N_2' \ell_2' \ell_2' \| \alpha^{21} \times \alpha^{21} \| N_2 \ell_2 \ell_2 \rangle \langle 22 \| q^{+21} \times q^{21} \| 22 \rangle =$$

$$= (-)^{\ell_2'} E_3 B_{22} \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 & 2 \\ \ell_2 & 2 & \ell_2' \end{matrix} \right\} \langle N_2' \ell_2' \ell_2' \| \alpha^{21} \times \alpha^{21} \| N_2 \ell_2 \ell_2 \rangle \cdot \quad (6.27)$$

$$\cdot \sum_{\substack{N=0 \quad L=0 \\ N=2 \quad L=0,2,4}} \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & L \end{matrix} \right\} \langle 22 \| q^{+21} \| NL \rangle \langle NL \| q^{21} \| 22 \rangle =$$

$$= -\sqrt{5} (-)^{\ell_2'} \frac{E_2 E_3 B_{22}}{2 C_2} \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 & 2 \\ \ell_2 & 2 & \ell_2' \end{matrix} \right\} \sum_{N'' \ell_2'' \ell_2''} \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 & 0 \\ \ell_2' & \ell_2 & \ell_2'' \end{matrix} \right\} \cdot$$

$$\cdot \langle N_2' \ell_2' \ell_2' \| \beta^{+21} / \beta^{21} \| N_2'' \ell_2'' \ell_2'' \rangle \langle N_2'' \ell_2'' \ell_2'' \| \beta^{+21} / \beta^{21} \| N_2 \ell_2 \ell_2 \rangle$$

$$E_3 B_{24} \left[\left[q^{[2]} \times q^{[2]} \right]^{[4]} \times \left[\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]} \right]^{[4]} \right]^{[0]} :$$

$$E_3 B_{24} \langle N_1 l_1 N_2 l_2 l_2', 2^+ M | \left[\left[q^{[2]} \times q^{[2]} \right]^{[4]} \times \left[\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]} \right]^{[4]} \right]^{[0]} | N_1 l_1 N_2 l_2 l_2', 2^+ M' \rangle =$$

$$= \frac{1}{3} (-)^{l_1'} E_3 B_{24} \left\{ \begin{matrix} 2 & 4 & 2 \\ l_2 & 2 & l_2' \end{matrix} \right\} \langle N_2 l_2 l_2' \| \alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]} \| N_2 l_2 l_2 \rangle \cdot$$

$$\cdot \langle 22 \| q^{+[2]} \times q^{[2]} \| 22 \rangle = \quad (6.28)$$

$$= (-)^{l_1'} E_3 B_{24} \left\{ \begin{matrix} 2 & 4 & 2 \\ l_2 & 2 & l_2' \end{matrix} \right\} \langle N_2 l_2 l_2' \| \alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]} \| N_2 l_2 l_2 \rangle \sum_{\substack{N=0 \quad L=0 \\ N=2 \quad L=0,2,4}} \left\{ \begin{matrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & L \end{matrix} \right\} \langle 22 \| q^{+[2]} \| NL \rangle \langle NL \| q^{[2]} \| 22 \rangle$$

$$= - (-)^{l_1'} E_3 B_{24} \left\{ \begin{matrix} 2 & 4 & 2 \\ l_2 & 2 & l_2' \end{matrix} \right\} \langle N_2 l_2 l_2' \| \alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]} \| N_2 l_2 l_2 \rangle \cdot$$

$$\cdot \sum_{\substack{N=0 \quad L=0 \\ N=2 \quad L=0,2,4}} \left\{ \begin{matrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & L \end{matrix} \right\} \langle 22 \| q^{+[2]} \| NL \rangle \langle NL \| q^{[2]} \| 22 \rangle$$

Die Matrixelemente des Dipoloperators lauten:

$$q^{+[1]} : \quad \langle 11, N_2' l_2' l_2', 1 \| q^{+[1]} \times \hat{I}^{[0]} \| 00 N_2 l_2 l_2, l_2 \rangle = 3 \hat{l}_2 \left\{ \begin{matrix} 0 & l_2 & l_2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & l_2' & 1 \end{matrix} \right\}$$

$$\cdot \langle 11 \| q^{+[1]} \| 00 \rangle \langle N_2' l_2' l_2' \| \hat{I}^{[0]} \| N_2 l_2 l_2 \rangle$$

$$= 3 (-)^{l_2'+l_2} \delta_{l_2' l_2} \hat{l}_2 \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & l_2 \\ 0 & l_2' & 1 \end{matrix} \right\} = \sqrt{3} \quad (6.29)$$

$$q^{[1]} : \quad \langle 11, N_2' l_2' l_2', 1 \| q^{[1]} \times \hat{I}^{[0]} \| 00 N_2 l_2 l_2 l_2 \rangle =$$

$$= 3 \hat{l}_2 \left\{ \begin{matrix} 0 & l_2 & l_2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & l_2' & 1 \end{matrix} \right\} \langle 11 \| q^{[1]} \| 00 \rangle \cdot$$

$$\cdot \langle N_2' l_2' l_2' \| \hat{I}^{[0]} \| N_2 l_2 l_2 \rangle = 0 \quad (6.30)$$

Da auf Grund der Auswahlregeln das Matrixelement verschwindet.

$$M_1 \left[\left[q^{+[1]} \times q^{[1]} \right]^{[1]} \times \alpha^{[2]} \right]^{[1]} :$$

$$M_1 \langle 11, N_2' l_2' l_2', 1 \| \left[q^{+[1]} \times q^{[1]} \right]^{[1]} \times \alpha^{[2]} \| 00 N_2 l_2 l_2 l_2 \rangle =$$

$$\begin{aligned}
 &= 3 M_1 \hat{\ell}_2 \begin{Bmatrix} 0 & \ell_2 & \ell_2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & \ell_2' & 1 \end{Bmatrix} \langle 11 \| q^{+[1]} q^{[1]} \| 00 \rangle \langle N_2' \vartheta_2' \ell_2' \| \alpha^{[2]} \| N_2 \vartheta_2 \ell_2 \rangle = \\
 &= 3 (-)^{\ell_2' + \ell_2} M_1 \sqrt{\frac{E_2}{2 C_2}} \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \ell_2 & 1 & \ell_2' \end{Bmatrix} \cdot \\
 &\quad \cdot \langle N_2' \vartheta_2' \ell_2' \| \beta^{+[2]} + \beta^{[2]} \| N_2 \vartheta_2 \ell_2 \rangle
 \end{aligned} \tag{6.31}$$

$$\begin{aligned}
 &M_{20} \left[[q^{+[1]} \times q^{[1]}]^{[1]} \times [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]} \right]^{[1]} : \\
 &M_{20} \langle 11, N_2' \vartheta_2' \ell_2' 1 \| [q^{+[1]} \times q^{[1]}]^{[1]} \times [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]} \| 00 N_2 \vartheta_2 \ell_2 \ell_2 \rangle = \\
 &= 3 M_{20} \hat{\ell}_2 \begin{Bmatrix} 0 & \ell_2 & \ell_2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & \ell_2' & 1 \end{Bmatrix} \langle 11 \| q^{+[1]} \| 00 \rangle \cdot \\
 &\quad \langle N_2' \vartheta_2' \ell_2' \| \alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]} \| N_2 \vartheta_2 \ell_2 \rangle = \\
 &= 3 (-)^{\ell_2' + \ell_2} M_{20} \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \ell_2 & 1 & \ell_2' \end{Bmatrix} \langle N_2' \vartheta_2' \ell_2' \| \alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]} \| N_2 \vartheta_2 \ell_2 \rangle
 \end{aligned} \tag{6.32}$$

$$\begin{aligned}
 &M_{22} \left[[q^{+[1]} \times q^{[1]}]^{[1]} \times [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[2]} \right]^{[1]} : \\
 &M_{22} \langle 11 N_2' \vartheta_2' \ell_2' 1 \| [q^{+[1]} \times q^{[1]}]^{[1]} \times [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[2]} \| 00 N_2 \vartheta_2 \ell_2 \ell_2 \rangle = \\
 &= 3 (-)^{\ell_2' + \ell_2} M_{22} \begin{Bmatrix} 1 & 1 & \ell_2 \\ 2 & \ell_2' & 1 \end{Bmatrix} \langle N_2' \vartheta_2' \ell_2' \| [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[2]} \| N_2 \vartheta_2 \ell_2 \rangle = \\
 &= 3 \sqrt{5} \frac{E_2 M_{22}}{2 C_2} \begin{Bmatrix} 1 & 1 & \ell_2 \\ 2 & \ell_2' & 1 \end{Bmatrix} \sum_{N_2' \vartheta_2' \ell_2'} \begin{Bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ \ell_2 & \ell_2' & \ell_2'' \end{Bmatrix} \langle N_2' \vartheta_2' \ell_2' \| \beta^{+[2]} + \beta^{[2]} \| N_2' \vartheta_2' \ell_2'' \rangle \cdot \\
 &\quad \cdot \langle N_2'' \vartheta_2'' \ell_2'' \| \beta^{+[2]} \times \beta^{[2]} \| N_2 \vartheta_2 \ell_2 \rangle
 \end{aligned} \tag{6.33}$$

Die Matrixelemente des Quadrupoloperators lauten:

$$\begin{aligned}
 &q^{+[2]} : \\
 &\langle 22 N_2' \vartheta_2' \ell_2' 2 \| [q^{+[2]} \times \hat{I}^{[0]}]^{[2]} \| 00 N_2 \vartheta_2 \ell_2 \ell_2 \rangle = \\
 &= 5 \hat{\ell}_2 \begin{Bmatrix} 0 & \ell_2 & \ell_2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & \ell_2' & 2 \end{Bmatrix} \langle 22 \| q^{+[2]} \| 00 \rangle \langle N_2' \vartheta_2' \ell_2' \| \hat{I}^{[0]} \| N_2 \vartheta_2 \ell_2 \rangle = \\
 &= 5 (-)^{\ell_2' + \ell_2} \delta_{\ell_2' \ell_2} \hat{\ell}_2 \begin{Bmatrix} 2 & 2 & \ell_2 \\ 0 & \ell_2' & 2 \end{Bmatrix} = \sqrt{5}
 \end{aligned} \tag{6.34}$$

$$\begin{aligned}
 q^{[2]}: & \langle 22 N_2' v_2' l_2' 2 \| [q^{[2]} \times \hat{I}^{[0]}] 00 N_2 v_2 l_2 l_2 \rangle = \\
 & = 5 \hat{e}_2 \begin{Bmatrix} 0 & l_2 & l_2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & l_2' & 2 \end{Bmatrix} \langle 22 \| q^{[2]} \| 00 \rangle \cdot \\
 & \cdot \langle N_2' v_2' l_2' \| \hat{I}^{[0]} \| N_2 v_2 l_2 \rangle = 0
 \end{aligned} \tag{6.35}$$

$$\begin{aligned}
 M_2 & [[q^{+[2]} \times q^{[2]}]^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[2]} : \\
 M_2 & \langle 22 N_2' v_2' l_2' 2 \| [q^{+[2]} \times q^{[2]}]^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[2]} \| 00 N_2 v_2 l_2 l_2 \rangle = \\
 & = 5 M_2 \hat{e}_2 \begin{Bmatrix} 0 & l_2 & l_2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & l_2' & 2 \end{Bmatrix} \langle 22 \| Q^{+[2]} \| 00 \rangle \cdot \\
 & \cdot \langle N_2' v_2' l_2' \| \alpha^{[2]} \| N_2 v_2 l_2 \rangle = \\
 & = 5 (-)^{l_2' + l_2} M_2 \sqrt{\frac{E_2}{2C_2}} \begin{Bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ l_2 & 2 & l_2' \end{Bmatrix} \langle N_2' v_2' l_2' \| \beta^{+[2]} + \beta^{[2]} \| N_2 v_2 l_2 \rangle
 \end{aligned} \tag{6.36}$$

$$\begin{aligned}
 M_{20} & [[q^{+[2]} \times q^{[2]}]^{[2]} \times [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]}]^{[2]} \\
 M_{20} & \langle 22 N_2' v_2' l_2' 2 \| [[q^{+[2]} \times q^{[2]}]^{[2]} \times [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]}]^{[2]} \| 00 N_2 v_2 l_2 l_2 \rangle = \\
 & = 5 M_{20} \hat{e}_2 \begin{Bmatrix} 0 & l_2 & l_2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & l_2' & 2 \end{Bmatrix} \langle 22 \| q^{+[2]} \| 00 \rangle \cdot \\
 & \cdot \langle N_2' v_2' l_2' \| [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}] \| N_2 v_2 l_2 \rangle = \\
 & = 5 (-)^{l_2' + l_2} M_{20} \begin{Bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ l_2 & 2 & l_2' \end{Bmatrix} \cdot \langle N_2' v_2' l_2' \| \alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]} \| N_2 v_2 l_2 \rangle = \\
 & = 5 \sqrt{5} \frac{E_2 M_{20}}{2C_2} \begin{Bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ l_2 & 2 & l_2' \end{Bmatrix} \sum_{N'' v'' l_2''} \begin{Bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ l_2 & l_2' & l_2'' \end{Bmatrix} \cdot \\
 & \cdot \langle N_2' v_2' l_2' \| \beta^{+[2]} \times \beta^{[2]} \| N_2' v_2'' l_2'' \rangle \langle N_2' v_2' l_2' \| \beta^{+[2]} \times \beta^{[2]} \| N_2 v_2 l_2 \rangle
 \end{aligned} \tag{6.37}$$

$$M_{22} \left\| \left[q^{+L_1} \times q^{L_1} \right]^{L_1} \times \left[\alpha^{L_1} \times \alpha^{L_1} \right]^{L_1} \right\|^{L_1};$$

$$M_{22} \langle 22 N_2' \nu_2' \ell_2' 2 \parallel \left\| \left[q^{+L_1} \times q^{L_1} \right]^{L_1} \times \left[\alpha^{L_1} \times \alpha^{L_1} \right]^{L_1} \right\|^{L_1} \parallel 00 N_2 \nu_2 \ell_2 \ell_2 \rangle \quad (6.38)$$

$$= 5(-)^{\ell_2' + \ell_2} M_{22} \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 & \ell_2 \\ 2 & \ell_2' & 2 \end{matrix} \right\} \langle N_2' \nu_2' \ell_2' \parallel \left[\alpha^{L_1} \times \alpha^{L_1} \right]^{L_1} \parallel N_2 \nu_2 \ell_2 \rangle$$

$$M_{24} \left\| \left[q^{+L_1} \times q^{L_1} \right]^{L_1} \times \left[\alpha^{L_1} \times \alpha^{L_1} \right]^{L_1} \right\|^{L_1};$$

$$M_{24} \langle 22 N_2' \nu_2' \ell_2' 2 \parallel \left\| \left[q^{+L_1} \times q^{L_1} \right]^{L_1} \times \left[\alpha^{L_1} \times \alpha^{L_1} \right]^{L_1} \right\|^{L_1} \parallel 00 N_2 \nu_2 \ell_2 \ell_2 \rangle \quad (6.39)$$

$$= 5(-)^{\ell_2' + \ell_2} M_{24} \left\{ \begin{matrix} 2 & 4 & 2 \\ \ell_2 & 2 & \ell_2' \end{matrix} \right\} \langle N_2' \nu_2' \ell_2' \parallel \left[\alpha^{L_1} \times \alpha^{L_1} \right]^{L_1} \parallel N_2 \nu_2 \ell_2 \rangle$$

6.3. Tabellen

Tabelle 1

Die Koeffizienten in der Darstellung von η_e bzw. $\mathcal{P}_e$. In die Tabelle ist darüberhinaus $k_1 R_0$ eingefügt.

l=0

In diesem Fall treten nur die Koeffizienten $\hat{\mathcal{S}}_{00}$, $\hat{\mathcal{L}}_{02}$, $\hat{\mathcal{S}}_{022}$ und $\hat{\mathcal{S}}_{044}$ auf.

n	$k_0 R_0$	$\hat{\mathcal{S}}_{00}$	$\hat{\mathcal{L}}_{02}$	$\hat{\mathcal{S}}_{022}$	$\hat{\mathcal{S}}_{044}$
1	4.49340	1.19758	4.24532	6.77080	10.36211
2	7.72525	3.53980	12.54827	75.70377	37.49008
3	10.90412	7.05236	24.99998	317.21770	140.43045
4	14.06619	11.73569	41.60195	897.05663	381.63883

l=1

n	$k_1 R_0$	$\hat{\mathcal{S}}_1$	$\hat{\mathcal{S}}_{10}$	$\hat{\mathcal{S}}_{12}$	$\hat{\mathcal{L}}_{13}$
1	2.08157	0.91195	0.13095	0.12712	0.42342
2	5.94037	0.43489	0.75661	0.29806	3.44836
3	9.20584	0.41341	1.80661	0.68771	8.28157
4	12.40445	0.40682	3.28070	1.24264	15.03627

l=2

n	$\hat{\mathcal{S}}_{132}$	$\hat{\mathcal{S}}_{134}$	$\hat{\mathcal{S}}_{154}$
1	-0.08076	6.00986	15.73195
2	3.10505	-2.48137	10.30056
3	23.96947	-32.44977	24.81254
4	85.53846	-124.18540	76.28237

Tabelle 1 (Fortsetzung)

l=2

n	$k_2 R_0$	δ_2	$\hat{\zeta}_{20}$	$\hat{\zeta}_{22}$	$\hat{\zeta}_{24}$
1	3.34209	0.53283	-0.07068	-0.47106	-0.32529
2	7.28993	0.35862	-0.03005	-1.20383	-1.83347
3	10.61385	0.34665	0.03995	-2.28265	-3.93586
4	13.84611	0.34261	0.13495	-3.71856	-6.72591

n	ε_{20}	ε_{24}	$\hat{\gamma}_{202}$
1	-1.05029	0.72181	-1.72948
2	-4.99713	3.43424	-30.06088
3	-10.59303	7.27998	-134.32016
4	-18.02726	12.38910	-388.62430

n	$\hat{\gamma}_{242}$	$\hat{\gamma}_{244}$	$\hat{\gamma}_{264}$
1	-0.10054	2.79591	7.00387
2	2.15541	-1.01947	13.12132
3	13.46257	-13.99135	224.51529
4	43.10165	-49.76755	601.61754

Tabelle 2

Koeffizienten in der Darstellung von η_k bzw. $\mathcal{F}_k$ bei Vernachlässigung der Beiträge von $Y^{1'}$ für $1' = 1$, d.h. alle ξ_{l0} und $\hat{\xi}_{l0}$ verschwinden.

1=0

Hier verbleibt nur $\hat{\xi}_{00} = 0.17794$ unabhängig von n .

1=1

Die nicht verschwindenden Größen sind δ_1 , $\hat{\xi}_{10}$ und $\hat{\xi}_{12}$.

n	δ_1	$\hat{\xi}_{10}$	$\hat{\xi}_{12}$
1	0.91195	0.14822	0.13365
2	0.43489	0.24908	0.10623
3	0.41341	0.24911	0.09681

1=2

Hier verbleiben δ_2 , $\hat{\xi}_{20}$, $\hat{\xi}_{22}$ und $\hat{\xi}_{24}$.

n	δ_2	$\hat{\xi}_{20}$	$\hat{\xi}_{22}$	$\hat{\xi}_{24}$
1	0.53283	0.09089	-0.15621	0.07291
2	0.35862	0.21581	-0.03985	0.04864
3	0.34665	0.22306	-0.03121	0.04582
4	0.34261	0.22549	-0.02829	0.04486

Tabelle 3

Koeffizienten der potentiellen Energie.

l=0

In diesem Falle treten nur die Größen C'_0 und c_{00} auf.

n	C'_0	c_{00}
1	0.02359	2.07209
2	0.00824	52.71893
3	0.00417	244.24460
4	0.00251	715.34025

l=1

Hier entfällt der Koeffizient c_{14} .

n	C'_1	c_{11}	c_{10}	c_{12}
1	-0.02957	-0.83024	-0.33137	-0.07234
2	-0.00769	-1.22846	2.01336	1.17619
3	-0.00324	-1.21058	22.07785	8.75304
4	-0.00185	-1.20449	85.13017	32.58399

l=2

n	C'_2	c_{21}	c_{20}	c_{22}	c_{24}
1	0.00974	-0.75297	1.07508	2.87053	3.48086
2	0.00386	-1.02748	16.72662	33.72217	43.16001
3	0.00191	-1.01987	73.80394	138.13882	171.13563
4	0.00114	-1.01664	213.43087	386.83196	471.64009

Tabelle 4

Koeffizienten der kinetischen Energie.

l=0

In diesem Falle treten nur die Größen B'_0 und b_{00} auf.

n	B'_0	b_{00}
1	0.02359	4.46730
2	0.00824	59.79866
3	0.00417	258.34532
4	0.00251	738.81000

l=1

Hier entfällt der Koeffizient b_{14} .

n	B'_1	b_{11}	b_{10}	b_{12}
1	-0.02957	0.99364	-0.37466	-0.22195
2	-0.00796	-0.35866	3.13334	1.25207
3	-0.00324	-0.38377	25.31994	9.63719
4	-0.00185	-0.39085	91.33088	34.58679

l=2

n	B'_2	b_{21}	b_{20}	b_{22}	b_{24}
1	0.00974	0.31769	0.70179	2.03948	2.63154
2	0.00386	-0.31023	16.39429	31.44476	39.25872
3	0.00191	-0.32614	73.62033	133.69775	163.03813
4	0.00114	-0.33138	213.43087	379.51638	457.96390

Tabelle 5

Koeffizienten des Hamiltonoperators.

l=0

Hier sind nur q_{00} und p_{00} von Null verschieden. Es verbleibt:

n	$\frac{1}{4}(q_{00}-p_{00})$	$\frac{1}{2}(q_{00}+p_{00})$
1	0.43726	1.19758
2	24.58955	3.53980
3	118.59696	7.05239
4	351.79425	11.73568

l=1

Hier entfallen die Glieder mit q_{14} und p_{14} .

n	$\frac{1}{4}(q_{11}-p_{11})$	$\frac{1}{2}(q_{11}+p_{11})$	$\frac{1}{4}(q_{10}-p_{10})$	$\frac{1}{2}(q_{10}+p_{10})$	$\frac{1}{4}(q_{12}-p_{12})$
1	1.50879	-1.57954	0.98808	-1.40236	-1.77529
2	1.44052	-0.75326	-0.55263	-2.38205	-0.05171
3	1.40642	-0.71603	-17.04509	-4.15059	-6.30926
4	1.39545	-0.70464	-70.38445	-6.68791	-26.47719

n	$\frac{1}{2}(q_{12}+p_{12})$
1	-1.77529
2	-1.93379
3	-2.54239
4	-3.48256

l=2

n	$\frac{1}{4}(q_{21}-p_{21})$	$\frac{1}{2}(q_{21}+p_{21})$	$\frac{1}{4}(q_{20}-p_{20})$	$\frac{1}{2}(q_{20}+p_{20})$	$\frac{1}{4}(q_{22}-p_{22})$
1	-1.43758	1.19145	0.86763	0.66861	3.93407
2	-1.54973	0.80191	18.25432	0.89347	39.27871
3	-1.52788	0.77514	82.00539	1.02308	157.22546
4	-1.51964	0.76611	237.99833	1.22550	436.84565

Tabelle 5 (Fortsetzung)

n	$\frac{1}{2}(q_{22}+p_{22})$	$\frac{1}{4}(q_{24}-p_{24})$	$\frac{1}{2}(q_{24}+p_{24})$
1	-1.44943	3.90111	-0.01881
2	-3.15215	49.89282	-3.27633
3	-5.55158	195.34002	-8.00048
4	-8.75756	534.40495	-14.24785

Tabelle 6

Koeffizienten des 2^1 -Pol-Operators.

In dieser Tabelle sind noch die jeweiligen Werte von $k_1^{(n)}R_0$ eingetragen.

l=0

Hier verschwinden sämtliche Koeffizienten.

l=1

n	$k_1^{(n)}R_0$	M_1	$\hat{\lambda}_{11}$	$\hat{\mu}_{110}$	$\hat{\mu}_{112}$
1	2.08157	-0.31452	0.44818	-0.05700	-0.16681
2	5.94037	0.02917	-0.01374	-0.07661	-0.02721
3	9.20584	-0.01194	0.00511	0.07548	0.02776
4	12.40445	0.00654	-0.00271	-0.07513	-0.02797

n'	$k_3^{(n')}R_0$	$\hat{\lambda}_{13}$	$\hat{\mu}_{132}$	$\hat{\mu}_{134}$
1	4.51409	-0.15241	0.01309	0.13202
2	8.58375	0.10680	0.22117	-0.36557
3	11.97273	-0.10208	-0.49915	0.78047
4	15.24451	0.10035	0.85271	-1.31919

Tabelle 6 (Fortsetzung)

n	$k_5^{(n)} R_0$	15
1	6.75645	-0.14238
2	11.07021	0.21469
3	14.59055	-0.36419
4	17.94718	0.54758

l=2

n	$k_2^{(n)} R_0$	$\hat{M}_2$	$\hat{\lambda}_{22}$	$\hat{\mu}_{220}$	$\hat{\mu}_{222}$	$\hat{\mu}_{224}$
1	3.34209	0.26319	-0.41359	0.28427	0.40913	0.4628
2	7.28993	-0.03995	0.04887	-0.02696	-0.17113	-0.2710
3	10.61385	0.01825	-0.02188	0.00753	0.14724	0.2577
4	13.84611	-0.01059	0.01262	-0.00079	-0.13884	-0.2531

n	$k_0^{(n)} R_0$	$\hat{\lambda}_{20}$	$\hat{\mu}_{202}$
1	4.43941	0.18806	0.29994
2	7.28993	-0.18806	-1.13458
3	10.90412	0.18806	2.38627
4	14.06619	-0.18806	-4.05519

n	$k_4^{(n)} R_0$	$\hat{\lambda}_{24}$	$\hat{\mu}_{242}$	$\hat{\mu}_{244}$
1	5.64670	0.21169	-0.07988	-0.17855
2	9.84045	-0.14509	-0.13978	0.32784
3	13.29556	0.13724	0.35868	-0.59161
4	16.60934	-0.13420	-0.62527	0.92498

n	$k_6^{(n)} R_0$	$\hat{\lambda}_{26}$
1	7.85107	0.29236
2	12.27933	-0.31559
3	15.86322	0.50416
4	19.26271	-0.73367

Verzeichnis der Figuren

Fig.Nr.	Darstellung
1	Normalschwingungen der Dipolriesenresonanzen
2	Normalschwingungen der Quadrupolriesenresonanzen
3	Mögliche Schwingungsachsen der Quadrupolriesenresonanzen
4	Konvergenzuntersuchung an einem anharmonischen Vibrator (Phononen)
5	prolaten Roatationskern
6	asymmetrischen Kreisel
7	Kern mit zwei Minima
8	anharmonischen Vibrator (Basis)
9	prolaten Rotationskern
10	asymmetrischen Kreisel
11	Kern mit zwei Minima
12	PES und Querschnitt eines Vibrators
13	E1-Absorptions- und Streuquerschnitt für einen anharmonischen Vibrator
14	E2-Absorptionsquerschnitt eines Vibrators
15	addierter E1- E2- Absorptionsquerschnitt eines Vibrators
16	PES und Querschnitt eines prolaten Rotators
17	E1-Absorptions- und Streuquerschnitt für einen prolaten Rotator
18	E2-Absorptionsquerschnitt für einen prolaten Rotator
19	addierter E1- E2- Absorptionsquerschnitt eines prolaten Rotators
20	PES und Querschnitt eines oblaten Rotators
21	E1-Absorptions- und Streuquerschnitt für einen oblaten Rotator
22	E2-Absorptionsquerschnitt eines oblaten Rotators
23	addierter E1- E2- Absorptionsquerschnitt eines oblaten Rotators

Fig.Nr.	Darstellung
24	PES und Querschnitt eines asymmetrischen Kreisels
25	E1-Absorptionsquerschnitt und E1-Streuquerschnitt eines asymmetrischen Kerntyps
26	E2-Absorptionsquerschnitt
27	addierter E1- E2- Absorptionsquerschnitt eines asymmetrischen Kreisels
28	die PES der Nd-Isotopenreihe mit den zugehörigen Querschnitten
30	E1-Absorptions- und Streuquerschnitt von ^{138}Nd
31a	E2-Absorptions- und
31b	addierter E1- E2- Absorptionsquerschnitt von ^{138}Nd
32	wie Fig. 30 jedoch für ^{142}Nd
33	" " 31 " " ^{142}Nd
34	" " 30 " " ^{144}Nd
35	" " 31 " " ^{144}Nd
36	" " 30 " " ^{146}Nd
37	" " 31 " " ^{146}Nd
38	" " 30 " " ^{148}Nd
39	" " 31 " " ^{148}Nd
40	" " 30 " " ^{150}Nd
41	" " 31 " " ^{150}Nd
42	" " 28 " " Sm-Isotope
43	" " 29 " " Sm-Isotope
44	" " 30 " " ^{144}Sm
45	" " 31 " " ^{144}Sm
46	" " 30 " " ^{146}Sm
47	" " 31 " " ^{146}Sm
48	" " 30 " " ^{150}Sm
49	" " 31 " " ^{150}Sm
50	" " 30 " " ^{152}Sm
51	" " 31 " " ^{152}Sm
52	" " 30 " " ^{154}Sm
53	" " 31 " " ^{154}Sm
54	" " 30 " " ^{156}Sm
55	" " 31 " " ^{156}Sm

Fig.Nr.

Darstellung

56	wie Fig. 28 jedoch für Ru-Isotope				
57	"	"	29	"	" Ru-Isotope
58	"	"	30	"	" ^{94}Ru
59	"	"	31	"	" ^{94}Ru
60	"	"	30	"	" ^{98}Ru
61	"	"	31	"	" ^{98}Ru
62	"	"	30	"	" ^{104}Ru
63	"	"	31	"	" ^{104}Ru
64	"	"	30	"	" ^{106}Ru
65	"	"	31	"	" ^{106}Ru
66	"	"	30	"	" ^{108}Ru
67	"	"	31	"	" ^{108}Ru
68	"	"	28	"	" Os-Isotope
69	"	"	30	"	" ^{184}Os
70	"	"	31a	"	" ^{184}Os
71	"	"	31b	"	" ^{184}Os
72	"	"	30	"	" ^{188}Os
73	"	"	31a	"	" ^{188}Os
74	"	"	31b	"	" ^{188}Os
75	"	"	30	"	" ^{190}Os
76	"	"	31a	"	" ^{190}Os
77	"	"	31b	"	" ^{190}Os
78	"	"	30	"	" ^{192}Os
79	"	"	31a	"	" ^{192}Os
80	"	"	31b	"	" ^{192}Os
81	"	"	28	"	" Gd-Isotope
82	"	"	30	"	" ^{152}Gd
83	"	"	31	"	" ^{152}Gd
84	"	"	30	"	" ^{156}Gd
85	"	"	31	"	" ^{156}Gd
86	"	"	30	"	" ^{160}Gd
87	"	"	31	"	" ^{160}Gd

Fig.Nr.

Darstellung

88	wie Fig. 28 jedoch für Te-Isotope					
89	"	"	30	"	"	^{126}Te
90	"	"	31a	"	"	^{126}Te
91	"	"	31b	"	"	^{126}Te
92	"	"	30	"	"	^{128}Te
93	"	"	31a	"	"	^{128}Te
94	"	"	31b	"	"	^{128}Te
95	"	"	30	"	"	^{130}Te
96	"	"	31a	"	"	^{130}Te
97	"	"	31b	"	"	^{130}Te

Literaturverzeichnis

- 1) M.Danos, W. Greiner Phys. Rev. 134b (1964) 284
- 2) H.Steinwedel, J.G.Jensen Z. Naturf. 5a (1950) 413
- 3) G.Gneuss, Dissertation, Universität Ffm. 1970
- 4) A.R.Edmonds, Drehimpulse in der Quantenmechanik,
(B.I. Hochschultaschenbücher 1964)
- 5) Amos de Shalit, Igal Talmi, Nucl. Shell Theory,
Ac. Press, New York (1963)
- 6) U.Fano, G.Racah, Irreduzible Tensorial, Sc. Ac. Press,
New York (1959)
- 7) M.Rotenberg, R.Bivius, N.Metropolis, J.K.Wooten,
The 3j- and 6j-Symbols, Tech. Press (1959)
- 8) J.M.Eisenberg, W.Greiner, Nuclear Theory vol. 3
North Holland Publishing Comp. (1970)
- 9) R.Hofstadter, Ann. Rev. Nucl. Sc. 7 (1957) 231
- 10) H.Stock, Diplomarbeit, Universität Ffm. 1967
- 11) H.Stock, H.Arenhövel, Z. Phys. 212 (1968) 83
- 12) T.Urbas, W.Greiner, Z.Phys. 196 (1966) 44
- 13) V.Rezwani, Diplomarbeit, Universität Ffm. 1971
- 14) R.Ligensa, Sissertation, Universität Ffm. 1966
- 15) H.Arenhövel, Dissertation, Universität Ffm. 1965
- 16) M.Sedlmayr, Dissertation, Universität Ffm. 1976
- 17) M.Brand, Diplomarbeit, Universität Ffm. 1973
- 18) R.Sedlmayr, Diplomarbeit, Universität Ffm. 1973
- 19) M.Brand, R.Sedl yr, V.Rezwani, W.Greiner, Intern. Conf.
on Nucl. Struct., Sendai Japan 1972
- 20) P.Carlos, H.Beil, R.Bergere, A.Lepetre, preliminary data
- 21) B.L.Berman, Atlas of Photoneutron Cross Sections
- 22) H.J.Weber, M.G.Huber, W.Greiner, Z.Phys. 192 (1966) 182
- 23) M.Goldhaber, E.Teller, Phys. Rev. 74 (1948) 1046
- 24) M.Danos, Lec. on Photonuc. Phys., Tech. Rep. 1961

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. W. Greiner, sei hier für die Anregung zu dieser Arbeit und sein Interesse an ihrem Verlauf gedankt. Auch meinen Kollegen möchte ich für die zahlreichen Gespräche danken. Meiner lieben Frau, Monika Sedlmayr, danke ich für die gute Zusammenarbeit.

Weiterhin gilt mein Dank Herrn Brose für den Druck der Arbeit, und dem Recheninstitut der GSI und dem zentralen Recheninstitut der Universität Frankfurt/M für die großzügig zur Verfügung gestellte Rechenzeit. Frau Utschig sei für ihre stetige Hilfsbereitschaft gedankt.

Lebenslauf

Am 16. Juli 1947 wurde ich in Frankfurt/M geboren. Meine Eltern sind der technische Inspektor Max Sedlmayr und seine Ehefrau Magda, geb. Bauersfeld.

Ostern 1954 wurde ich in die Sophien-Schule eingeschult. Danach wechselte ich zur Falk-Realschule, wo ich 1964 die Prüfung der Mittleren Reife ablegte. Im gleichen Jahr besuchte ich weiterführend die Freiherr-vom-Stein-Schule, an der ich im November 1966 meine Abiturprüfung bestand.

Vom 1. Januar 1967 bis zum 31. April 1968 absolvierte ich den Grundwehrdienst.

Im Sommersemester 1968 begann ich mein Studium der Physik und der Mathematik an der TH in Darmstadt. Im Wintersemester 1968/69 wechselte ich zur Johann-Wolfgang-Goethe-Universität in Frankfurt, wo ich im Sommersemester 1970 das Vordiplom in Physik und im Sommersemester 1973 das Diplom in Physik ablegte.

Die Diplomarbeit und die Dissertation entstanden im Institut für Theoretische Physik unter Leitung von Herrn Professor Dr. W. Greiner.

Meine akademischen Lehrer waren:

Prof.W.Greiner, Prof.W.Scheid, Prof.G.Köthe, Prof.W.Martienssen, Prof.U.Gerhard, Prof.E.Schopper, Prof.K.H.König, Prof.Stelzer, Prof.J.Schnakenberg, Prof.Dänzer

